

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
PH.D.

PAR  
IDRISS AMMARA

OPTIMISATION DE FORME DE PROFILS AÉRODYNAMIQUES PAR LE CALCUL  
DE SENSIBILITÉS DISCRÈTES OBTENUES PAR LA TECHNIQUE DES  
RÉCURRENCES SIMPLIFIÉES

MONTRÉAL, le 6 JANVIER 2005

© droits réservés de Idriss Ammara

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Christian Masson, Directeur de thèse  
Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure

M. Azzedine Soulaïmani, Président du jury  
Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure

M. B. Rabi Baliga, Examineur externe  
Département de Génie Mécanique, Université McGill

M. Henri Champliand, Examineur  
Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 28 JANVIER 2005

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

À mes grands parents,  
feux André et Odette Laine,  
pour m'avoir appris la persévérance.

# **OPTIMISATION DE FORME DE PROFILS AÉRODYNAMIQUES PAR LE CALCUL DE SENSIBILITÉS DISCRÈTES OBTENUES PAR LA TECHNIQUE DES RÉCURRENCES SIMPLIFIÉES**

Idriss Ammara

## **SOMMAIRE**

Durant les dix dernières années, une nouvelle approche de conception aérodynamique s'est développée basée sur les méthodes de calcul numérique en mécanique des fluides : l'optimisation aérodynamique. Ce type d'approche repose sur l'élément commun de la formulation d'une fonction objectif à optimiser. L'objectif principal de cette thèse consiste donc au développement et à la mise en oeuvre d'une procédure d'optimisation aérodynamique de forme appliquée à des profils dédiés au domaine éolien.

La procédure proposée a la capacité de modifier la géométrie de profils aérodynamiques afin de minimiser une fonction objectif établie à partir d'une ou plusieurs propriétés relatives à l'écoulement autour des profils afin de répondre à un problème donné. La méthodologie développée offre également la possibilité d'imposer des contraintes quant à la géométrie du profil. Afin de réduire le nombre de variables nécessaires à la description de la géométrie de profils aérodynamiques, ces derniers sont approximés par des courbes B-Splines Non-Uniforme (NUBS) (Piegl et Tiller, 1997). La physique des écoulements considérés dans ce travail est modélisée par les équations incompressibles stationnaires/laminaires de Navier-Stokes. La solution numérique de ces équations est obtenue par l'utilisation d'une méthode aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEM) (Ammara et Masson, 2004) à collocation d'ordre égale. Cette méthode efficace et robuste est basée sur un algorithme original de résolution couplé combinant la prescription d'une équation de Poisson pour la pression, le traitement implicite de type Newton des non-linéarités et l'utilisation de l'algorithme de solution de système linéaire GMRES (Saad, 1990) pré-conditionné par une décomposition LU incomplète. Par rapport à son homologue séquentiel, cette formulation couplée de CVFEM s'avère être plus robuste et jusqu'à 34 fois plus rapide. La simulation numérique de l'écoulement autour de profils permet l'obtention de la valeur de la fonction objectif. La minimisation de cette fonction est guidée par l'algorithme d'optimisation DFP (Davidson-Fletcher-Powell) (Davidson, Fletcher et Powell, 1959) de type quasi-Newton dont la mise en oeuvre nécessite la connaissance du gradient de la fonction objectif par rapport aux variables géométriques de conception. Ces dérivées sont obtenues par la résolution d'un système d'équations de sensibilités discrètes basé sur la technique des récurrences simplifiées (Gilbert, 1991). Par rapport aux différences finies, les dérivées obtenues par cette approche sont précises à 1% près mais nécessitent un effort de calcul près de 10 fois moindre. A travers l'étude de trois problèmes

d'optimisation de profils aérodynamiques, la procédure globale proposée est validée et sa performance confirmée.

Ce travail constitue une première étape en vue d'appliquer une procédure d'optimisation aérodynamique à la conception de pales d'éoliennes. La méthodologie d'optimisation proposée représente les bases d'un outil de conception aérodynamique pratique et efficace nécessitant un effort de mise en oeuvre minimum pour la solution de problèmes.

# **AIRFOIL SHAPE OPTIMIZATION BY CALCULATION OF DISCRETE SENSITIVITIES OBTAINED USING SIMPLIFIED RECURRENCES**

Idriss Ammara

## **ABSTRACT**

During the last decade, a new approach in aerodynamic design has been developed based on Computational methods in Fluid Dynamics(CFD) : aerodynamic optimization. These type of approaches rest on the common element of the formulation of an objective function to be optimized. Thus, the principal goal of this thesis consists of the development and implementation of an aerodynamic shape optimization procedure applied to airfoil wing sections dedicated to the wind turbine field.

The proposed procedure has the capacity to modify airfoil profile geometries in order to minimize an objective function established on one or more flow properties in order to solve a given problem. The developed methodology also makes it possible to impose constraints on the airfoil geometry. In order to reduce the number of variables necessary to describe airfoil geometries, the latter are approximated by Non-Uniform B-Splines(NUBS) curves (Piegl et Tiller, 1997). The physics of the flows considered in this work is modeled by the steady incompressible/laminar Navier-Stokes equations. The numerical solution of these equations is obtained by the use of a co-located equal order Control Volume Finite Elements method (CVFEM) (Ammara et Masson, 2004). This method is based on an original coupled solution algorithm combining the prescription of a Poisson pressure equation, an implicit Newton-type treatment of non-linearities and the use of an ILUT pre-conditioned GMRES algorithm (Saad, 1990) for the solution of the linear system of equations. This coupled CVFEM formulation proves to be more robust and up to 34 times faster than its segregated counterpart. The numerical simulation of the flow around airfoil profiles determines the value of the objective function. The minimization of this function is guided by the quasi-Newton DFP (Davidson-Fletcher-Powell) optimization algorithm (Davidson, Fletcher et Powell, 1959) which requires the knowledge of the objective function gradient with respect to the geometrical design variables. These derivatives are obtained by the solution of a discrete sensitivities system of equations based on the simplified recurrences technique (Gilbert, 1991). When compared to finite differences, the values of the derivatives obtained by this approach are within 1%, but require almost 10 times less computational effort. Through the study of three airfoil optimization problems, the overall procedure is validated and its performance confirmed.

This work constitutes a first step toward the application of an aerodynamic optimization procedure for the design of wind turbine blades. The proposed methodology represents

the basis of an efficient and practical aerodynamic design tool requiring minimal effort in problem set up.

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, j'aimerais remercier mon directeur de thèse, le professeur Christian Masson titulaire de la chaire AÉMN en Aérodynamique des Éoliennes en Milieu Nordique, qui m'a permis de travailler sur un sujet de recherche pertinent et de grand intérêt. Il a su habilement me prodiguer un encadrement continu tout en me permettant une grande liberté d'action dans ma recherche. J'aimerais également souligner le soutien apporté à ce projet par le Fond pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche ainsi que Bowater et la Banque Royale.

En second lieu, je tiens à témoigner ma gratitude au professeur Soulaïmani pour avoir acceptée la présidence du jury et avec lequel j'ai eu le plaisir d'avoir des échanges scientifiques enrichissants. Je voudrais également remercier le Professeur Baliga d'avoir bien voulu être membre externe sur ce jury. Professor, your teaching and advises were greatly appreciated in the early stages of my thesis and definitively made a difference. Je tiens aussi à remercier le professeur Champlaud pour sa présence comme membre du jury ainsi que pour ses conseils techniques. Par ailleurs, je tiens à témoigner mes plus chaleureux remerciements et mon entière gratitude à mes parents et ma famille pour leur support inconditionnel depuis le début. Il m'aurait été impossible d'accomplir ce travail sans l'amitié et le soutien de mes amis de toujours Yves et Marie-Octobre, Gabi et Sinead, David et Peggy ainsi que tous les autres qui pour n'être pas nommés n'en sont pas moins présents. J'aimerais également remercier Cédric<sup>2</sup>, Christophe, Nathalie, Francis, Arezki,



Dung, Joris, Stéphane, Mohamed, Barthélémy, Philippe, Étienne, Jean-Daniel, Jonathan, Yacine et tous les autres collègues étudiants aux cycles supérieurs pour la création d'une atmosphère de travail stimulante et conviviale. Je remercie également mes coéquipiers de l'équipe de soccer de l'ÉTS pour tous les moments passés à transpirer ensemble. Enfin, je tiens à remercier l'ensemble des employés de l'école de Technologie Supérieure pour l'environnement stimulant qu'ils ont su offrir et pour leur patience à mon endroit quelquefois.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	v
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES . . . . .	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Comparaison des approches analytique, expérimentale et numérique en mécanique des fluides . . . . .	1
1.2 Impact des méthodes numériques sur la conception aérodynamique .	5
1.3 Objectifs et motivations . . . . .	8
1.4 Plan du rapport . . . . .	9
CHAPITRE 2 OPTIMISATION AÉRODYNAMIQUE DE FORME . . . . .	11
2.1 Problématique et objectifs de recherche . . . . .	11
2.2 Revue de la littérature . . . . .	16
2.2.1 Modélisation géométrique de profils aérodynamiques et génération de maillage . . . . .	16
2.2.1.1 Splines cubiques d'Hermite . . . . .	17
2.2.1.2 Courbes de Bézier . . . . .	18
2.2.1.3 B-splines . . . . .	18
2.2.1.4 NURBS . . . . .	19
2.2.2 Solution de l'écoulement autour du profil . . . . .	20
2.2.2.1 Modèle mathématique . . . . .	21
2.2.2.2 Méthode numérique . . . . .	21
2.2.3 Différenciation de la fonction objectif . . . . .	26
2.2.3.1 Méthode des sensibilités . . . . .	27
2.2.3.2 Méthode des variables adjointes . . . . .	29

2.2.3.3	Discrétiser puis différencier ou différencier puis discrétiser (équations discrètes ou continues) . . . . .	30
2.2.3.4	Méthode de différenciation automatique . . . . .	32
2.2.4	Algorithme d'optimisation . . . . .	33
2.2.4.1	Méthodes basées sur le gradient . . . . .	33
2.2.4.2	Méthodes directes . . . . .	35
2.3	MÉTHODOLOGIE . . . . .	35
CHAPITRE 3 MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DE PROFIL . . . . .		38
3.1	Modélisation géométrique de profil par l'utilisation de NUBS . . . . .	38
3.1.1	Modèle mathématique . . . . .	38
3.1.2	Modélisation de profil aérodynamique . . . . .	43
3.1.3	Résultats . . . . .	45
3.2	Génération de maillage . . . . .	51
CHAPITRE 4 SOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT . . . . .		57
4.1	Modèle mathématique . . . . .	57
4.2	Méthode numérique . . . . .	58
4.2.1	Éléments de base . . . . .	59
4.2.1.1	Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	59
4.2.1.2	Équations intégrales de conservation . . . . .	60
4.2.1.3	Fonctions d'interpolation . . . . .	61
4.2.2	Formulation séquentielle . . . . .	64
4.2.3	Formulation couplée . . . . .	67
4.2.4	Linéarisation de Newton . . . . .	71
4.3	Résultats . . . . .	73
4.3.1	Écoulement dans une cavité entraînée . . . . .	74
4.3.2	Écoulement autour d'un cylindre circulaire . . . . .	81
4.4	Conclusion sur la solution numérique de l'écoulement . . . . .	88
CHAPITRE 5 DIFFÉRENCIATION DE LA FONCTION OBJECTIF . . . . .		90
5.1	Méthode des sensibilités discrètes par la technique des récurrences simplifiées . . . . .	90
5.1.1	Modèle mathématique . . . . .	90
5.1.2	Mouvement du maillage . . . . .	95
5.1.3	Mise en oeuvre . . . . .	96
5.1.4	Résultats . . . . .	97
5.1.5	Conclusion sur la différenciation de la fonction objectif . . . . .	110
5.2	Méthode d'optimisation basée sur le gradient . . . . .	111

CHAPITRE 6	RÉSULTATS ET DISCUSSIONS . . . . .	115
6.1	Exemple de design inverse à 2 variables sur un profil NACA 63013 représenté par une NUBS à 12 points de contrôle . . . . .	115
6.2	Exemple de design inverse à 18 variables entre des profils NACA 63315 et NACA 63013 représentés par des NUBS à 11 points de contrôle . . . . .	125
6.3	Problème d'optimisation de la finesse à 8 variables sur un profil NACA 63013 approximé par une NUBS à 13 points de contrôle . . .	131
CHAPITRE 7	CONCLUSION . . . . .	139
7.1	Compte rendu de la thèse . . . . .	139
7.2	Contributions du travail . . . . .	140
7.3	Recommandations . . . . .	141
BIBLIOGRAPHIE	. . . . .	144

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I      Comparaison des approches possibles pour la résolution de problèmes en mécanique des fluides . . . . .	4
Tableau II      Nombre de points de contrôle d'une représentation de profil aérodynamique par NUBS, nécessaires à l'obtention d'une précision inférieure ou égale à $1.85 \times 10^{-4}$ . . . . .	50
Tableau III      Formes spécifiques de l'équation générale de transport . . . . .	58
Tableau IV      vitesses minimales et maximales aux axes centraux- $Re = 400$ . . .	75
Tableau V      vitesses minimales et maximales aux axes centraux- $Re = 1000$ . .	76
Tableau VI      Comparaisons du coefficient de traînée $C_D$ et de la longueur de la bulle de recirculation $L_W$ (Mesurée à partir de l'arrière du cylindre)- $Re = 20$ et $40$ . <sup>1</sup> Deux maillages superposés furent employés pour ces calculs . . . . .	85
Tableau VII      Comparaison des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7, $y_c(7)$ , obtenues par différences finies et par récurrences simplifiées, profil NACA 0018 . . . . .	105
Tableau VIII      Comparaison des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport à l'abscisse du point de contrôle 2, $x_c(2)$ , obtenues par différences finies et par récurrences simplifiées, profil NACA 0018 . . . . .	106
Tableau IX      Variation des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport au niveau de convergence de la solution des équations de Navier-Stokes autour du profil NACA 0018 . . . . .	106
Tableau X      Variation des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport au niveau de convergence des équations de sensibilité obtenues par récurrences simplifiées pour le profil NACA 0018 . . . . .	107
Tableau XI      Comparaisons entre les valeurs initiales, cibles et obtenues des variables de conception, problème de design inverse à 18 variables, profils NACA-63315 et NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle . . . . .	129

Tableau XII	Comparaisons entre les valeurs initiales et optimisées des coefficients aérodynamiques et fonctions objectifs, problème d'optimisation de la finesse à 8 variables, profils NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle . . . . .	134
-------------	--	-----

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1    Caractéristiques du temps et des coûts associés aux approches expérimentale et numérique(CFD) . . . . .	5
Figure 2    Organigramme général du processus d'optimisation . . . . .	14
Figure 3    Fonctions de base cubiques ( $d' = 3$ ), vecteur noeud uniforme . . . . .	40
Figure 4    Fonctions de base cubiques ( $d' = 3$ ), vecteur noeud non-uniforme . . . . .	41
Figure 5    Approximation du profil S809 avec dix points de contrôle . . . . .	42
Figure 6    Évaluation de l'erreur géométrique entre le profil original cible et la courbe approximée . . . . .	44
Figure 7    Précision des approximations par NUBS du profil NACA 63013 en fonction du nombre de points de contrôle . . . . .	46
Figure 8    Distribution des coefficients de pression des approximations par NUBS du profil NACA 63013, angle d'attaque : $\alpha = 5$ deg, nombre de Reynolds : $Re=40$ . . . . .	47
Figure 9    Profil aérodynamique NACA 63013 original et approximation par une NUBS à 12 points de contrôle . . . . .	48
Figure 10    Profils aérodynamiques utilisés pour l'étude de la précision d'une représentation géométrique par NUBS . . . . .	49
Figure 11    Frontières d'un maillage en C :(a) espace d'indexation repéré par le couple (I,J), (b) espace géométrique défini par le système de coordonnées cartésiennes (x,y) . . . . .	52
Figure 12    Ligne de coupe du maillage correspondant à la ligne de courant $\psi = 0$ , issue de la solution non-visqueuse de l'écoulement autour du profil . . . . .	53
Figure 13    Fraction du maillage par interpolation transfinie pour la première zone adjacente du profil . . . . .	54

Figure 14	Détail du maillage autour du profil : (a) maillage par interpolation transfinie, (b) maillage (a) après l'application d'une procédure de lissage elliptique . . . . .	55
Figure 15	Vue finale complète d'un maillage en C réalisé par la technique proposée	56
Figure 16	Exemple de domaine de calcul discrétisé en éléments triangulaires et en volumes de contrôle polygonaux . . . . .	59
Figure 17	Volumes de contrôle types associés à (a) un noeud interne (b) un noeud de frontière . . . . .	60
Figure 18	Structure matricielle pour la méthode séquentielle . . . . .	65
Figure 19	Définitions du problème de l'écoulement dans la cavité entraînée . . .	74
Figure 20	Évolution de l'effort de calcul normalisé en fonction du nombre N de points de maillage, problème de la cavité entraînée -Re = 400, schéma FLO . . . . .	77
Figure 21	Effort de calcul normalisé pour le maillage $128 \times 128$ , problème de la cavité entraînée -Re = 400, schéma FLO . . . . .	79
Figure 22	Historique de convergence, problème de la cavité entraînée -Re = 400, maillage $128 \times 128$ , schéma FLO . . . . .	80
Figure 23	Demi maillage en O utilisé pour les simulations de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. Seul un point sur deux est présenté . . . . .	82
Figure 24	Lignes de courant pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire-Re = 40, schéma FLO . . . . .	83
Figure 25	Évolution de l'effort de calcul normalisé en fonction du nombre N de points de maillage, écoulement autour d'un cylindre circulaire-Re = 40, schéma MAW . . . . .	84
Figure 26	Effort de calcul normalisé pour le maillage, écoulement autour d'un cylindre circulaire-Re = 40, maillage de $98 \times 167$ , schéma MAW . . . .	86
Figure 27	Historique de convergence, écoulement autour d'un cylindre circulaire-Re = 40, maillage de $98 \times 167$ , schéma MAW . . . . .	87
Figure 28	Profil NACA-0018 approximé par une NUBS possédant neuf points de contrôle . . . . .	98



Figure 29	Isocontours des dérivées par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 4, $y_c(4)$ autour du profil NACA 0018 : a) $\frac{du}{dy_c(4)}$ différences finies, b) $\frac{dv}{dy_c(4)}$ différences finies, c) $\frac{dp}{dy_c(4)}$ différences finies, a') $\frac{du}{dy_c(4)}$ méthode proposée, b') $\frac{dv}{dy_c(4)}$ méthode proposée, c') $\frac{dp}{dy_c(4)}$ méthode proposée . . . . .	99
Figure 30	Dérivée de la pression par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7, $x_c(7)$ , sur la surface du profil NACA 0018 . . . . .	101
Figure 31	Influence du mouvement du maillage sur la dérivée de la pression par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7, $x_c(7)$ , autour de la surface du profil NACA 0018 . . . . .	102
Figure 32	Dérivée de la composante de vitesse en x par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7, $x_c(7)$ , sur les noeuds voisins à la surface du profil NACA 0018 . . . . .	103
Figure 33	Dérivée de la composante de vitesse en y par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7, $x_c(7)$ , sur les noeuds voisins à la surface du profil NACA 0018 . . . . .	104
Figure 34	Historique de convergence, profil NACA 0018, $Re=40$ , (i) écoulement (CVFEM couplée), (ii) sensibilités, dérivée par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 4, $y_c(4)$ (CVFEM + récurrences simplifiées) . . . . .	109
Figure 35	Profils NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 12 points de contrôle, optimisation aérodynamique à deux variables, $(x_c(4), y_c(4))$ . . . . .	116
Figure 36	Isocontour de la fonction objectif basée sur la pression, $\mathcal{F}_p$ , dans l'espace de solution $(x_c(4), y_c(4))$ , NACA 63013, $\alpha = 5^\circ$ , $Re=40$ . . . . .	118
Figure 37	Coefficient de pression, optimisation du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 12 points de contrôle . . . . .	119
Figure 38	Historique de convergence de l'optimisation de $\mathcal{F}_p(x_c^n(4), y_c^n(4))$ sur le profil NACA 63013, $\alpha = 5^\circ$ , $Re=40$ . . . . .	120
Figure 39	Isocontour de la fonction objectif basée sur $C_L$ et $C_D$ , $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ , dans l'espace de solution $(x_c(4), y_c(4))$ , NACA 63013, $\alpha = 5^\circ$ , $Re=40$ . . . . .	121
Figure 40	Historique de convergence de l'optimisation de $\mathcal{F}_{C_L, C_D}(x_c^n(4), y_c^n(4))$ sur le profil NACA 63013, $\alpha = 5^\circ$ , $Re=40$ . . . . .	123

Figure 41	Évolution de la distance spatiale entre la solution des optimisations et la solution exacte en fonction du nombre de calculs de l'écoulement et du gradient, optimisation profil NACA 63013, $\alpha = 5^\circ$ , $Re=40$ . . . . .	124
Figure 42	Profils NACA-63313 et NACA-63013 ( $\alpha = 0^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle, optimisation aérodynamique à 18 variables . . . . .	126
Figure 43	Coefficient de pression, problème de design inverse, profils NACA-63315 et NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle . . . . .	127
Figure 44	Historique de convergence de l'optimisation de $\mathcal{F}_p$ , problème de design inverse à 18 variables, profils NACA-63315 et NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle .	128
Figure 45	Profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 40$ ) approximé par une NUBS possédant 13 points de contrôle, optimisation de la finesse à 8 variables . . .	131
Figure 46	Coefficient de pression, optimisation de la finesse du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle . . . . .	133
Figure 47	Coefficient de pression ( $C_p$ ), optimisation de la finesse du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle . . . . .	135
Figure 48	Coefficient de friction local ( $C_{fx}$ ), optimisation de la finesse du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ , $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle . . . . .	137

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

$a$	Coefficient des équations discrétisées de Navier-Stokes
$A$	Matrice de coefficients des équations discrétisées de Navier-Stokes
$\mathcal{A}$	Surface délimitant un volume de contrôle, $[m^2]$
$b$	Constante dans l'équation discrétisée de quantité de mouvement
$c$	Corde du profil, $[m]$
$C_D$	Coefficient de traînée
$C_L$	Coefficient de portance
$C_p$	Coefficient de pression
$d$	diamètre du cylindre, $[m]$
$d'$	Degré d'une B-Spline
$d^u$	Coefficient de gradient de pression
$d^k$	Direction de recherche de l'algorithme d'optimisation
$D$	Traînée, $[N/m]$
$F_g$	Fonction géométrique à optimiser pour la représentation de profil par NUBS
$\mathcal{F}$	Fonction objectif
$\tilde{\mathcal{F}}$	Fonction objectif pénalisée
$\mathcal{F}_{C_L, C_D}$	Fonction objectif basée sur les coefficients aérodynamiques de profil
$\mathcal{F}_{C_L, C_D}$	Fonction objectif basée sur la finesse aérodynamiques de profil
$\mathcal{F}_p$	Fonction objectif basée sur la distribution de pression
$\mathcal{F}_T$	Fonction de pénalité
$h_i$	Amplitude de la perturbation pour les différences finies

$\mathcal{H}$	Hessian de la fonction objectif $\mathcal{F}$
$J$	Matrice jacobienne
$\mathcal{J}$	Flux total de $\phi$
$\mathcal{J}_c$	Flux de convection de $\phi$
$\mathcal{J}_D$	Flux de diffusion de $\phi$
$k$	Nombre de points discrets du profil
$L$	Force de portance d'un profil, $[N/m]$
$L'$	Longueur de référence pour le problème de la cavité entraînée, $[m]$
$L_i$	Longueur des segments entre les points discrets du profil
$m$	Nombre de variables géométriques de conception
$M$	Nombre d'éléments triangulaires possédant le point $c$ comme sommet
$n + 1$	Nombre de points de contrôle d'une courbe NUBS
$n_j$	vecteur unitaire normal sortant
$N$	Fonction de base d'une courbe NUBS
$N$	Nombre de points de maillage
$N_T$	Nombre de contraintes d'épaisseur de profil
$\mathcal{N}$	Matrice de fonction de base de B-Spline
$p$	Pression
$P_i$	Point de contrôle d'une courbe NUBS
$P_p$	Point discret d'une courbe NUBS
$q$	Ordonnancement d'un point sur une ligne radiale de maillage autour d'un profil
$R$	Résidus des équations discrétisées de Navier-Stokes
$Re$	Nombre de Reynolds

$S_\phi$	Terme de source associé à la variable dépendante $\phi$
$S_k$	Distance normalisée sur le contour du profil
$t$	Paramètre d'une courbe NUBS
$t_i$	Élément du vecteur noeud d'une courbe NUBS
$t(x_i)$	Épaisseur du profil à une station $x_i$ donnée, $[m]$
$T$	Vecteur noeud d'une courbe NUBS
$u, v$	Composantes cartésiennes de la vitesse selon x et y, $[m/s]$
$u_i^m$	Composante de la vitesse massique
$\hat{u}$	Pseudo-vitesse
$U_{min}$	Vitesse minimale dans la direction x pour le problème de la cavité entraînée, $[m/s]$
$U_{wall}$	Vitesse de la paroi mobile problème de la cavité entraînée, $[m/s]$
$U_\infty$	Vitesse de l'écoulement libre, $[m/s]$
$V^k$	Approximation du hessian de la fonction objectif $\mathcal{F}$
$V_{max}$	Vitesse maximale dans la direction y pour le problème de la cavité entraînée, $[m/s]$
$V_{min}$	Vitesse minimale dans la direction y pour le problème de la cavité entraînée, $[m/s]$
$\mathcal{V}_{CV}$	volume de contrôle, $[m^3]$
$x, y$	Système de coordonnées cartésiennes
$x_c, y_c$	Abcisse et ordonnée d'un point de contrôle d'une courbe NUBS
$x_m$	Coordonnée d'un point de maillage
$\alpha$	Angle d'attaque du profil, [degré]
$\beta$	Constante d'amortissement pour la méthode de Newton

$\epsilon$	Amplitude du critère d'arrêt de l'algorithme d'optimisation
$\epsilon_g$	Erreur géométrique discrète maximale sur le profil
$\bar{\epsilon}_g$	Erreur géométrique moyenne par point sur le profil
$\Gamma_\phi$	Coefficient de diffusion associé à la variable dépendante $\phi$
$\mu$	Viscosité dynamique, $[N \cdot s/m^2]$
$\omega_i$	Poids associé au point de contrôle d'une courbe NURBS
$\omega_t$	Constante de la fonction de pénalité
$\phi$	Variable dépendante
$\Phi$	Vecteur des variables dépendantes
$\Psi$	Multiplicateur de Lagrange
$\rho$	Densité, $[kg/m^3]$

## **CHAPITRE 1**

### **INTRODUCTION**

#### **1.1 Comparaison des approches analytique, expérimentale et numérique en mécanique des fluides**

Le développement de moyens de calcul digital dans les années 60 a révolutionné la façon dont les ingénieurs solutionnent les problèmes en mécanique des fluides et en transfert de chaleur. Avant l'avènement de l'ordinateur, traditionnellement, seules les approches analytique et expérimentale étaient employées pour le développement aérodynamique d'équipements et de véhicules. S'appuyant sur des méthodes et des idées remontant au début du 20<sup>ième</sup> siècle, le calcul numérique en mécanique des fluides (CFD) a connu un essor fulgurant durant les trente dernières années et le nombre de chercheurs et d'ingénieurs travaillant dans cette discipline ne cesse d'augmenter. Une comparaison de ces trois approches utilisées en mécanique des fluides fera ressortir leurs forces et leurs faiblesses respectives et donnera le recul nécessaire pour juger de l'évolution et des orientations futures de ces trois disciplines [91].

Dans l'approche théorique ou analytique, les équations aux dérivées partielles qui régissent la dynamique des fluides sont résolues à l'aide d'outils mathématiques classiques et la solution obtenue possède en général une forme analytique. De par les non-linéarités propres aux équations de conservation de la mécanique des fluides, de nombreuses hypothèses simplificatrices doivent être émises afin de rendre les problèmes accessibles. L'approche analytique se limite donc à des écoulements simples et ne peut pas être appliquée à des géométries complexes. Son utilisation comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes pratiques d'ingénierie se limite aux étapes préliminaires d'évaluation du problème pour lesquelles elle peut donner une solution générale rapide. Concrètement, seules les approches expérimentales et numériques sont utilisées de nos jours dans le développement de design aérodynamique. La méthode la plus précise et la plus fiable pour obtenir

des informations sur un phénomène physique demeure l'étude expérimentale. Toutefois, il est souvent très coûteux et parfois techniquement très difficile de réaliser une étude expérimentale pleine grandeur reproduisant les conditions d'opérations exactes dans lesquelles opère l'équipement réel. L'alternative aux essais pleine grandeur consiste à effectuer des mesures sur des modèles à échelle réduite. Ceci permet de réduire significativement les coûts des expériences mais ces derniers restent cependant très élevés. Ainsi, un modèle d'avion à une échelle de 1/30 coûte environ un demi million de dollars et les frais d'utilisation d'une soufflerie peuvent aller jusqu'à 10000 \$ par jour. L'utilisation d'un modèle réduit entraîne en outre un certain nombre de difficultés. De par les différences d'échelles, il devient difficile et délicat de reproduire les conditions de tests correspondant aux conditions d'opérations réelles des équipements testés. Ce problème est particulièrement aigu dans le cas de tests sur des avions de grandes dimensions opérant dans des écoulements à hauts nombres de Reynolds ou sur des engins spatiaux rencontrant des conditions d'entrée dans l'atmosphère. Par ailleurs, l'utilisation de modèles réduits engendre aussi des erreurs et des incertitudes provenant de l'application de corrections de facteurs d'échelles employées afin d'extrapoler les mesures expérimentales vers l'échelle du problème réel. De plus, les modèles réduits n'intègrent pas toujours toutes les composantes du problème réel telles que la combustion des réacteurs, ce qui peut limiter la précision des résultats. Une autre limite de l'approche expérimentale réside dans l'équipement de mesure lui même. Il est parfois difficile, voir impossible, de relever des mesures à certains endroits de l'écoulement sans le perturber, ce qui limite le nombre de capteurs pouvant être installés sur un modèle. De plus, l'équipement de mesure n'est pas à l'abri d'erreurs [54].

En contrepartie, la grande force de l'approche expérimentale réside dans sa capacité à effectuer pour un design donné les centaines de milliers de cas tests différents nécessaires à la réalisation d'un programme de développement, dans des limites de temps et de coûts raisonnables : une tâche impensable de façon numérique. Par exemple, pour une géométrie d'aile d'avion donnée les essais en soufflerie permettent de tester cette dernière sous tous



les angles d'attaque et les nombres de Reynolds correspondants au cahier des charges de l'avion.

La croissance constante des capacités informatiques combinée à la relative maturité des méthodes numériques en mécanique des fluides a permis aux ingénieurs-chercheurs d'étendre l'utilisation de ces méthodes à des problèmes de plus en plus complexes [46,90]. Néanmoins, beaucoup de problèmes restent encore hors de portée des méthodes numériques.

En mécanique des fluides, la description la plus générale des écoulements est faite à travers les équations de Navier-Stokes. Ces dernières établissent les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un fluide en équilibre thermodynamique. Toutefois, une solution directe de ces équations dans un cadre pratique dépasse très largement les capacités des super-ordinateurs les plus récents. Les écoulements rencontrés dans la plupart des applications pratiques impliquent des fluctuations turbulentes instationnaires s'étendant sur un large spectre d'échelles de longueur. Par exemple, la simulation directe de toutes ces échelles de turbulence sur un avion complet nécessiterait la résolution d'un système possédant environ  $10^{18}$  degrés de liberté ! Il est toutefois possible de simplifier les équations de Navier-Stokes vers une forme plus accessible tout en conservant un grand intérêt pratique pour l'ingénieur. Les écoulements turbulents sont ainsi simulés par les équations de Navier-Stokes moyennées par la procédure de décomposition de Reynolds combinées à des modèles de turbulences dans lesquels des moyennes statistiques sont utilisées pour décrire les détails de la turbulence. Cette approche permet d'obtenir des solutions relativement précises pour une vaste gamme de problèmes pratiques. La base commune de toutes les méthodes numériques en mécanique des fluides réside dans la résolution discrète d'équations aux dérivées partielles sur un domaine discrétisé. Ainsi, par leur nature même, ces méthodes numériques permettent d'obtenir partout les détails de l'écoulement mais la précision de ces informations est limitée par les hypothèses du modèle mathématique, la discrétisation du domaine de solution et l'algorithme de solution.

Tableau I  
 Comparaison des approches possibles pour la résolution de problèmes  
 en mécanique des fluides

Approche	Avantages	Limites
Analytique	1. Solution sous une forme simple et générale	1. Limitée à des écoulements et des géométries simples 2. Limitée à des problèmes linéaires
Expérimentale	1. Capacité d'être la plus précise et réaliste 2. Capacité à faire beaucoup de cas tests pour un design donné	1. Équipement requis 2. Problèmes d'échelle 3. Difficultés de mesure 4. Temps de mise en place 5. Coûts d'opérations
Numérique	1. Résolution de problèmes complexes 2. Rapidité et flexibilité 3. Information sur tout l'écoulement	1. Limites du modèle mathématique 2. Erreurs d'arrondis 3. Coûts et temps informatiques pour un nombre élevé de simulations

Le tableau I fait la synthèse des forces et des limites associées aux trois approches possibles pour la résolution de problèmes en mécanique des fluides. Par la simplicité des problèmes qu'elle permet de résoudre, l'approche analytique ne peut être utilisée que dans les phases préliminaires d'un projet de design aérodynamique. L'approche expérimentale nécessite un investissement de départ important en terme de temps et de coûts, mais une fois mise en place, elle permet d'effectuer des milliers de cas tests sur une configuration donnée. À l'opposé, l'approche numérique permet de tester rapidement et à peu de coût une configuration donnée mais les coûts et le temps associé augmentent rapidement avec le nombre de simulations. La figure 1 illustre bien les différences d'évolution du temps et des coûts en fonction du nombre de simulations pour les approches numérique et expérimentale [91]. Il apparaît que les utilisations optimales de ces deux approches soient

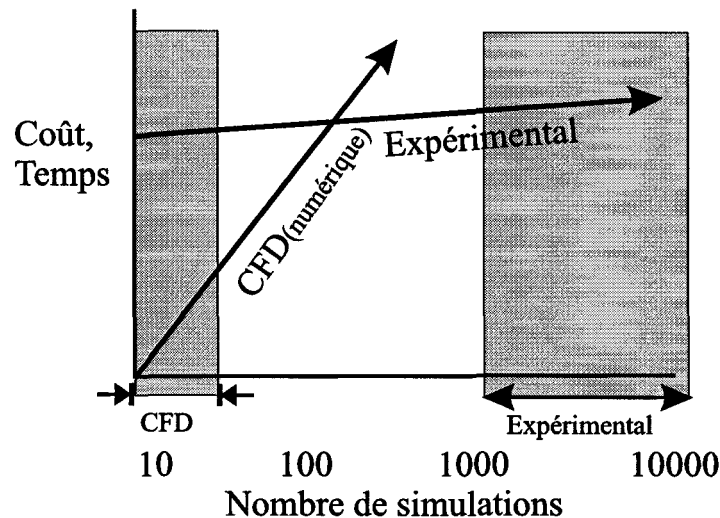


Figure 1 Caractéristiques du temps et des coûts associés aux approches expérimentale et numérique(CFD)

diamétralement opposées. L'approche numérique est très efficace pour effectuer rapidement un nombre restreint de simulations alors que l'approche expérimentale n'est efficace que lorsque le volume de simulations est élevé. Par conséquent, ces deux approches, numérique et expérimentale, devraient être utilisées de façon complémentaire pour la réalisation d'un projet de design aérodynamique en capitalisant sur les forces de chacune tel que décrit dans le chapitre suivant.

## 1.2 Impact des méthodes numériques sur la conception aérodynamique

Avant le développement de méthodes numériques fiables en mécanique des fluides, la principale méthode de design en aérodynamique était basée sur le principe d'essai-erreur. Durant les années 70 et le début des années 80, la phase d'essai de cette procédure était réalisée en soufflerie ou en tests en vol. De par les nombreux cycles d'aller-retour entre la table à dessin et la soufflerie, cette méthode de design se traduisait par des coûts et des temps de conception élevés (voir section précédente). Néanmoins, les designs aérodynamiques développés par cette approche empirique atteignirent un bon niveau de per-

formance que seules des méthodes numériques très précises auraient pu permettre d'améliorer. Les principales difficultés limitant la précision des méthodes numériques résident dans le traitement des interactions visqueuses turbulentes et des ondes de chocs qui commençaient à peine à être abordées par les numériciens des années 70 [20]. Cependant, durant les 25 dernières années, des progrès énormes ont été réalisés dans la simulation de ces écoulements complexes aussi bien au niveau algorithmique qu'au niveau des moyens de calcul [46]. Dans un premier temps, les méthodes numériques servirent comme outils d'analyse et comme guide dans le processus de design empirique d'essai-erreurs. Puis, des essais furent réalisés de façon numérique, ce qui contribua à diminuer le nombre d'itérations en soufflerie nécessaires à l'obtention d'un design acceptable.

Toutefois, c'est seulement au milieu des années 80 qu'est survenu le premier développement significatif dans les méthodes de conception aérodynamique avec l'apparition des méthodes de design itératives inverses. Initialement, ces méthodes étaient basées sur la résolution numérique des équations du potentiel complet couplées aux équations de couches limites [80] puis furent par la suite généralisées aux équations de Navier-Stokes [13, 97]. Cette approche débute par l'analyse d'une distribution de pression sur une aile initiale pour des conditions de vol données. Puis le concepteur décide des changements à apporter à la distribution de pression afin d'améliorer les caractéristiques aérodynamiques de l'aile. Cette nouvelle distribution de pression devient alors l'objectif ou la distribution cible à atteindre par la méthode inverse qui donne comme résultat une nouvelle géométrie d'aile. Typiquement, cette nouvelle géométrie ne rencontre pas les contraintes géométriques structurales et de fabrication et un certain nombre d'itérations sont nécessaires pour satisfaire ces dernières. Des itérations supplémentaires sont aussi requises afin que l'aile ait des caractéristiques acceptables sur toute l'enveloppe de vol. Une dernière série de raffinements est nécessaire afin de satisfaire de nouveau les contraintes géométriques qui auraient pu être violées lors de l'étape précédente. L'aile obtenue est par la suite testée

en soufflerie et comparée à d'autres ayant des philosophies de design différentes afin de retenir la meilleure.

Cette nouvelle approche améliore de façon significative la performance aérodynamique des ailes et diminue les temps et coûts de développement par rapport à la méthode empirique d'essai-erreur. Toutefois, les méthodes inverses présentent un certain nombre de difficultés. La plus importante réside dans la détermination d'une bonne distribution de pression cible qui, bien que directement liée aux performances de l'aile, nécessite l'expérience et l'intuition de concepteurs experts. Un autre problème est lié au respect des contraintes géométriques structurales et de fabrication qui sont souvent incompatibles avec la distribution de pression cible. De plus, l'aile doit présenter des caractéristiques acceptables sur toute l'enveloppe de vol. Il est par conséquent nécessaire de faire un design, compromis entre tous ces différents objectifs. Ceci représente un problème itératif ouvert dans lequel rien ne garantit que le design choisi corresponde au design optimum entre les contraintes géométriques et les objectifs aérodynamiques.

Durant les dix dernières années, une approche supérieure aux méthodes itératives inverses s'est développée : **l'optimisation multi-critères**. Cette approche n'a pu être réalisée que grâce à la croissance de l'efficacité des méthodes numériques et à l'avancement des moyens informatiques qui permettent de rendre acceptables les temps et les coûts de calcul associés à cette méthode. Ce type d'approche repose sur l'élément commun de la formulation d'une fonction objectif à optimiser. Cette fonction a pour particularité d'être directement basée sur les performances aérodynamiques et les caractéristiques géométriques du profil. La fonction objectif peut aussi faire intervenir des mesures de performances propres à d'autres domaines d'intérêts tels que l'acoustique ou le transfert de chaleur. Une procédure d'optimisation multi-critères bien formulée permet d'obtenir rapidement un design faisant un bon compromis entre les objectifs aérodynamiques et les contraintes géométriques imposées par la structure et la fabrication ou tous autres domaines d'intérêts. Cette approche permet aussi de considérer simultanément différentes conditions d'opérations, ce

qui réduit les itérations de design nécessaires à l'obtention de performances acceptables sur la totalité de l'enveloppe de vol et conduit à l'obtention d'un résultat aux performances supérieures.

### 1.3 Objectifs et motivations

Le travail doctoral présenté dans ce document est donc consacré au développement d'une procédure d'optimisation aérodynamique (OA) d'un profil portant. Ainsi, dans une telle approche, la géométrie du profil est paramétrisée à l'aide de courbes mathématiques (Béziérs, B-spline, NURBS) et les paramètres résultants correspondent aux variables d'entrée de l'optimisation. Contrairement aux méthodes inverses, les performances aérodynamiques (portance/trainée) sont directement liées à la fonction à optimiser qui peut intégrer plusieurs conditions d'opérations et diverses contraintes géométriques propres à l'application considérée. Les détails de la définition de ce sujet de doctorat seront présentés au chapitre 2 dans lequel est décrit la problématique de la recherche et l'identification des objectifs. Les principaux avantages de cette approche résident dans sa capacité à intégrer directement et simultanément les objectifs aérodynamiques et les contraintes géométriques à la procédure d'optimisation. Ainsi, les designs obtenus sont plus achevés et performants et ont nécessité moins de cycles de conception. L'optimisation aérodynamique permet de réaliser la majeure partie de la conception à l'aide de méthodes numériques et de limiter l'intervention expérimentale à la phase de validation et de mesures des performances sur la totalité de l'enveloppe d'opération. De plus, elle limite l'intervention humaine et ne dépend pas de l'intuition et de l'expérience du concepteur. L'intégration d'une procédure stricte d'optimisation aérodynamique dans le design permettra d'augmenter l'importance du rôle des méthodes numériques, ce qui se traduira par :

- la réalisation de designs plus achevés, aux performances supérieures (e.g. avions et voitures consommant moins, turbine produisant plus...);
- la réduction du temps et des coûts associés aux cycles de développement (i.e. réduction des allers-retours ordinateur/soufflerie);

- un produit final techniquement supérieur et moins cher.

Ainsi, une application systématique des méthodes numériques à l'optimisation aérodynamique permettra la réduction des coûts de développement et l'amélioration des performances des produits ce qui constitue une importante motivation du projet.

L'utilisation systématique de l'optimisation aérodynamique n'est toutefois pas encore généralisée à cause de deux principaux obstacles. Le premier réside dans l'importance des ressources de calcul nécessaires à ce type de méthode. Cette contrainte est particulièrement importante pour les problèmes tri-dimensionnels complexes. Le second frein à la généralisation de l'OA tient aux temps importants de mise en oeuvre des problèmes et au manque d'automatisation des méthodes qui nécessitent l'intervention systématique d'ingénieurs-chercheurs hautement spécialisés. Un des objectifs principaux de ce travail doctoral consiste à rendre plus accessible le processus d'optimisation aérodynamique tant au niveau des ressources informatiques, qu'au niveau de la complexité de mise en oeuvre des problèmes. Les motivations et objectifs du présent travail seront développés plus en détail au chapitre suivant lors de l'énoncé de la problématique de recherche.

#### **1.4 Plan du rapport**

Le chapitre 2 décrit la problématique de l'optimisation multi-critères en aérodynamique en exprimant précisément les objectifs de recherche à atteindre afin de clairement définir et limiter le sujet de recherche et son champ d'application. Sur la base de ces objectifs de recherche, la revue de la littérature vient compléter le chapitre 2 en y faisant la synthèse des travaux antérieurs en optimisation aérodynamique et dans les domaines de recherche connexes. Le chapitre 2 se termine par un court résumé de la méthodologie de recherche retenue développant les grandes lignes et les principales orientations qui ont été poursuivies au cours de ce doctorat. Le chapitre 3 décrit successivement les méthodes employées pour la modélisation géométrique de profil et la génération de maillage. Dans une première section, le modèle mathématique de représentation de profil est développé. Puis, sa mise

en oeuvre numérique est présentée. Cette première section se termine par la démonstration de la validité de la méthode proposée à travers l'étude de 16 profils aérodynamiques connus. La seconde section présente la technique de génération de maillage en C autour des profils aérodynamiques discrets obtenus par la modélisation préalablement établie. Le chapitre 4 décrit la méthode de résolution numérique de l'écoulement autour de profils aérodynamiques. Les équations de Navier-Stokes qui régissent la physique de l'écoulement sont présentées dans une première section. Puis, sur la base de l'algorithme de solution séquentielle SIMPLER [71], la méthode couplée proposée est développée en détail. La dernière section du chapitre établit le gain de performance de l'algorithme couplé de CV-FEM par rapport à son homologue séquentiel à travers l'analyse des cas tests classiques de la cavité entraînée et de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. Le chapitre 5 qui complète la description détaillée des éléments méthodologiques de cette thèse est divisé en deux. La première section du chapitre décrit en détail la méthode de calcul des sensibilités par la technique des récurrences simplifiées. Les aspects essentiels à la mise en oeuvre de la méthode y sont également présentés puis la précision et la performance de cette approche y sont évaluées par rapport à une différenciation par différences finies. La seconde section du chapitre 5 est consacrée à la présentation de l'algorithme d'optimisation DFP (Davidson-Fletcher-Powell) [21, 28]. Le chapitre 6 fait la synthèse de toutes les constituantes méthodologiques présentées aux chapitres précédents à travers la solution de trois problèmes d'optimisation de profils aérodynamiques. Ce chapitre démontre la validité et l'efficacité de la procédure globale d'optimisation aérodynamique proposée. Le chapitre 7 vient clore cette thèse en résumant les conclusions et les contributions du présent travail tout en suggérant certaines recommandations quant aux orientations futures de recherche.



## **CHAPITRE 2**

### **OPTIMISATION AÉRODYNAMIQUE DE FORME**

Une étape préliminaire fondamentale et essentielle au succès d'un projet de recherche consiste en l'expression précise de la problématique et des objectifs afin de clairement définir et limiter le sujet de recherche et son champ d'application. Une fois la problématique et les objectifs de recherche établis, il devient plus aisé de faire les choix quant à la méthodologie à employer. De par le caractère multi-disciplinaire de l'optimisation aérodynamique, il est judicieux de distinguer deux types d'objectifs : les objectifs généraux et spécifiques. Les objectifs généraux contiennent la définition du sujet en terme de réalisation finale et limite le champ d'application de la recherche; ils seront énoncés conjointement à la problématique de recherche. Les objectifs spécifiques correspondent aux besoins et aux qualités des éléments méthodologiques essentiels à la réalisation du projet. Ces derniers serviront de préambule à la revue de la littérature des sous-domaines abordés dans ce travail et permettront d'établir les forces et faiblesses des diverses avenues de recherche disponibles.

#### **2.1 Problématique et objectifs de recherche**

Les premières tentatives d'optimisation aérodynamique reposaient sur des méthodes d'essais-erreurs où l'expérience et l'intuition du concepteur avaient une influence décisive sur le succès de la procédure. La réalisation d'une solution guidée par l'évaluation indépendante et successive de l'influence de chaque paramètre de conception a peu de chances d'aboutir à l'obtention d'un design final véritablement optimal. Une approche alternative de design consiste à rechercher la forme de profil correspondant à une distribution de pression spécifique déterminée intuitivement par le concepteur pour obtenir des caractéristiques aérodynamiques recherchées. Ces méthodes appartiennent à la famille des méthodes inverses. L'expérience du concepteur joue encore un rôle important dans ces

méthodes puisque leurs réussites reposent en grande partie sur le choix d'une "bonne" distribution de pression cible. Une attention particulière doit être portée afin d'assurer que la distribution de pression cible corresponde à une forme de profil physiquement réalisable. De plus, les méthodes inverses ne permettent pas d'intégrer directement des contraintes géométriques ou des objectifs multi-critères.

**Pour réaliser le plein potentiel d'amélioration aérodynamique, une procédure d'optimisation doit offrir la possibilité d'une recherche dans un vaste espace de design combinée à une procédure automatique d'optimisation directement basée sur les performances aérodynamiques [47]. C'est dans ce schème de pensée que s'inscrit le présent projet doctoral.**

Dans ce travail, il est proposé de développer une procédure automatique de design aérodynamique de profil combinant l'optimisation numérique et les méthodes de calcul numérique en mécanique des fluides. Plus précisément, ce projet se concentrera sur l'optimisation aérodynamique de forme de profils bi-dimensionnels. Ce travail a pour domaine cible d'application la conception de profil de pale d'éolienne. Les conditions d'écoulement complexes et variées rencontrées dans ce domaine le rendent très propice à l'optimisation multi-critères. Ce projet n'est pas restreint aux applications éoliennes et peut être conceptuellement étendu aux domaines de l'aéronautique, l'automobile, l'énergie hydroélectrique et l'industrie navale ou à tous problèmes d'optimisation concernant la mécanique des fluides et le transfert de chaleur. De par le type d'applications projetées, la recherche sera menée dans le régime d'écoulement stationnaire et incompressible. Étant donné que ce travail constitue un premier effort en optimisation aérodynamique pour le groupe de recherche AÉMN (Aérodynamique des Éoliennes en Milieu Nordique), seul le régime d'écoulement laminaire est considéré.

Les grandes lignes d'une telle procédure d'optimisation aérodynamique de forme peuvent se résumer de la façon suivante. A partir d'un design initial de profil, une modélisation

géométrique est établie sur la base de courbes mathématiques. Les paramètres correspondant à cette modélisation représentent les variables d'entrée ou paramètres de conception de la procédure d'optimisation. L'écoulement autour du profil initial est par la suite obtenu par résolution numérique. Cette solution numérique permet d'évaluer la fonction objectif à optimiser (minimiser/maximiser), établie sur la base des performances aérodynamiques (portance/trainée). Puis, par l'entremise d'un algorithme d'optimisation, un nouvel ensemble de paramètres est généré de manière à minimiser la valeur de la fonction objectif tout en respectant certaines contraintes géométriques. Une nouvelle solution de l'écoulement est réalisée autour du profil associé à ce nouvel ensemble de paramètres et cette procédure itérative est répétée jusqu'à l'obtention d'une forme de profil proche d'un optimum. Si l'algorithme d'optimisation utilisé est de type direct, seule la valeur de la fonction objectif est nécessaire à l'avancement de la méthode de recherche. Toutefois, si l'algorithme d'optimisation est basé sur le gradient, les dérivées de la fonction objectif par rapport à l'ensemble des paramètres géométriques sont également nécessaires à la progression de la méthode. L'obtention de ces dérivées est une des problématiques centrales de l'OA puisqu'elle s'avère coûteuse en terme de temps de calcul et de mise en oeuvre. La fonction objectif peut tenir compte simultanément de diverses conditions d'opérations tout en intégrant des objectifs et des contraintes supplémentaires provenant d'autres disciplines telles que la structure, la vibration ou l'acoustique. Une procédure d'OA peut être décomposée en quatre sous-éléments :

1. modélisation géométrique de profils aérodynamiques et génération de maillage;
2. solution de l'écoulement autour du profil;
3. différenciation de la fonction objectif;
4. algorithme d'optimisation.

La figure 2 présente l'organigramme fonctionnel général d'un processus d'OA mettant en relation les sous-constituantes précédemment énumérées. Une telle procédure d'optimisation aérodynamique possédera les qualités suivantes :

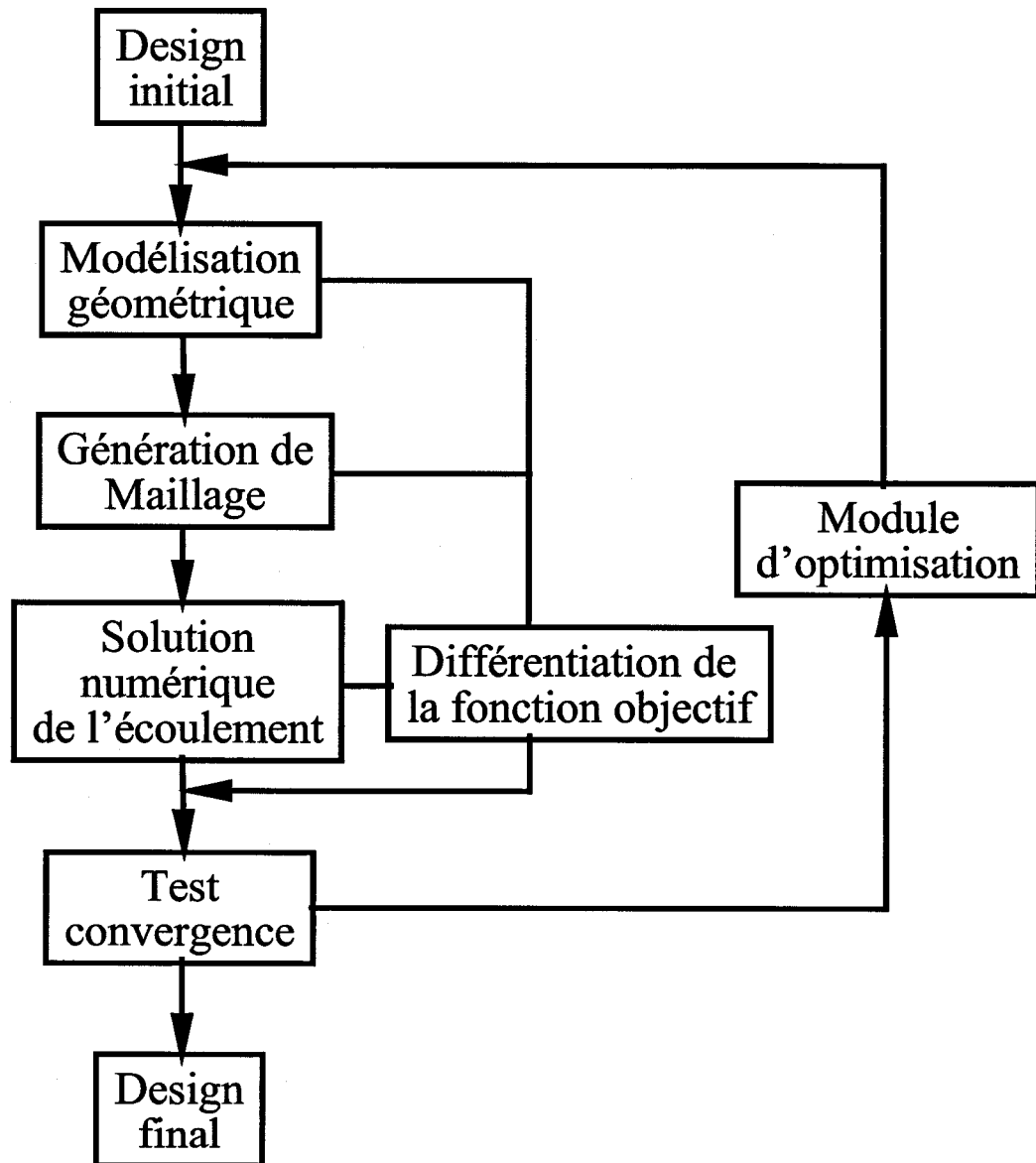


Figure 2 Organigramme général du processus d'optimisation

- elle réduit le temps et les coûts de développement en limitant le nombre de cycles du processus de conception et le recours à la soufflerie;
- elle réduit l'intervention humaine et dépend peu de l'expérience et de l'intuition de l'ingénieur-concepteur;
- elle permet la réalisation de design plus achevé et aux performances supérieures dans des environnements complexes tels que des problèmes d'optimisation multi-critères avec contraintes.

Malgré tous ces avantages, dans l'industrie, l'optimisation aérodynamique n'est pas utilisée de façon courante pour la résolution de problèmes pratiques de par la charge de calcul colossale qu'elle exige. Un des principaux objectifs de cette recherche consiste à développer une procédure OA la plus efficace possible nécessitant un effort de calcul minimum. Cette réduction de la charge de calcul peut être obtenue en :

- réduisant le nombre d'itérations du processus d'optimisation;
- réduisant le coût de chaque solution numérique de l'écoulement;
- réduisant le coût de la différenciation de la fonction objectif.

Une des autres raisons limitant l'utilisation pratique de l'OA provient de son manque d'automatisation et de flexibilité qui se traduit par un temps de mise en oeuvre important pour la résolution d'un nouveau problème au niveau de la différenciation de la fonction objectif. Une attention particulière sera portée à cette problématique lors du projet. Outre ces deux aspects, la précision et la qualité de la modélisation de l'écoulement sont des caractéristiques essentielles sur lesquelles repose toute la réussite de l'optimisation. La section suivante a pour objectif de faire le recensement, la synthèse et l'évaluation des travaux traitant des différentes constituantes de l'OA depuis les dix dernières années. Un intérêt particulier sera apporté à bien identifier et regrouper les auteurs selon les orientations qu'ils ont adoptées dans leurs recherches.

## 2.2 Revue de la littérature

### 2.2.1 Modélisation géométrique de profils aérodynamiques et génération de maillage

Souvent négligée lors des travaux antérieurs en optimisation aérodynamique de forme, la représentation géométrique de profils est pourtant un aspect essentiel au succès de telles recherches puisqu'elle influence de façon déterminante :

- la charge de calcul associée à la recherche du design optimal;
- les dimensions de l'espace de recherche;
- le bon conditionnement du problème.

L'emploi de courbes mathématiques (e.g. Bézier, B-spline...) permet de réduire significativement le nombre de variables nécessaires à la définition de la géométrie d'un profil par rapport à une représentation discrète par points. Par l'usage de telles courbes mathématiques, la définition d'un profil bi-dimensionnel peut être réduite de 200 points discrets à 15 points de contrôle sans entraîner une perte de précision perceptible (erreur par point inférieure à 0.002% de la corde). Qui plus est, le choix judicieux d'une paramétrisation géométrique de profils permet de réduire les coûts de calcul puisque le nombre d'itérations nécessaires aux algorithmes de recherche (Descente de gradient, quasi-Newton, algorithme génétique...) pour l'obtention d'un optimum peut être directement corrélé au nombre de variables  $m$  du problème [49]. L'élaboration d'une représentation géométrique ne doit toutefois pas être uniquement guidée par le seul objectif de réduction du nombre de variables mais doit aussi permettre une bonne flexibilité géométrique. Cette qualité permet d'étendre l'optimisation à un vaste espace de recherche sans lequel il est difficile de garantir la globalité de l'optimum trouvé. Un autre aspect à considérer lors du développement de la représentation géométrique est son effet sur le bon conditionnement du problème. Ainsi, la modélisation devrait être bijective; c'est à dire qu'à chaque géométrie de profil est associé une et une seule représentation paramétrique. Ceci évite le dédoublement superflu de l'espace de recherche qui peut ralentir voir même faire échouer l'algorithme

d'optimisation. De plus, la représentation tout en restant flexible devrait limiter la possibilité de bruits parasites de haute fréquence sur la surface du profil afin d'éliminer une fraction sans intérêt de l'espace de recherche et ainsi accélérer le processus d'optimisation. Finalement, il est souhaitable que la modélisation permette d'exprimer directement les contraintes géométriques sur l'épaisseur du profil par l'imposition de bornes minimum et maximum sur la variation des paramètres de conception.

Tous ces objectifs antinomiques doivent être considérés lors de l'élaboration d'une représentation géométrique de profils afin que le compromis résultant assure efficacité et robustesse au processus de design.

#### **2.2.1.1 Splines cubiques d'Hermite**

Ces courbes mathématiques sont formées par l'assemblage de morceaux de polynômes cubiques entre deux points de contrôle successifs, avec une continuité d'ordre 2 (continuité de pente) entre chaque morceau. Ces courbes sont définies par la position des points de contrôle ainsi que par un vecteur tangent. Les splines cubiques sont donc contrôlées par la position des points de contrôle et par la direction et la magnitude du vecteur tangent. D'une façon générale, les splines cubiques sont utilisées pour interpoler des données et rarement utilisées pour le design [98]. Le faible intérêt des concepteurs pour cette représentation vient de la difficulté à bien visualiser les effets des paramètres de contrôle. De plus, l'ordre de ces courbes est limité à l'ordre 3. Par contre, les splines cubiques d'Hermite passent par les points de contrôle ce qui permet d'imposer des contraintes géométriques sur la position de ces points mais les bornes des vecteurs tangents restent difficiles à établir. Une seule application des splines cubiques à l'optimisation aérodynamique a été trouvée lors de la recherche bibliographique pour la modélisation de turbines à gaz [88].

### 2.2.1.2 Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont été développées par le français P. Bézier de la régie automobile Renault autour des années soixante. Très populaire auprès des utilisateurs de modélisation assistée par ordinateur (CAD), il n'est pas étonnant de retrouver en grand nombre leur utilisation pour la modélisation de profil [8, 58, 74, 78, 79]. Ces travaux semblent avoir obtenu de bons résultats en utilisant les algorithmes génétiques pour l'optimisation. Contrairement aux splines cubiques d'Hermite, les courbes de Bézier sont des courbes basées sur des techniques d'approximation et ne passent pas par leurs points de contrôle. De plus, seule la position de ces points de contrôle définit la forme de la courbe (pas les dérivées). Ces caractéristiques rendent la modélisation par les courbes de Bézier très intuitive et facile. La formulation mathématique des courbes de Bézier [98] est établie sur la base des polynômes de Bernstein. Le degré des courbes de Bézier est dépendant du nombre de points, ce qui permet un ordre de continuité supérieur par rapport au spline cubique dont l'ordre de chaque segment est limité à 3. Les courbes de Bézier possèdent donc des qualités de lissage supérieures parce qu'elles possèdent des dérivées d'ordre supérieur. Les courbes de Bézier possèdent toutefois deux inconvénients majeurs :

- le contrôle des courbes est global : le mouvement d'un point de contrôle modifie l'ensemble de la courbe, ce qui limite sa flexibilité géométrique;
- les courbes ne passent pas par les points de contrôle : il est difficile d'imposer des contraintes géométriques sur la position de ces points.

Ces deux problèmes limitent l'utilisation des courbes de Bézier pour la paramétrisation de profil aérodynamique.

### 2.2.1.3 B-splines

Les B-splines uniformes (BS) et Non-Uniformes (NUBS) sont une autre méthode d'approximation permettant de générer des courbes autour de points de contrôle. En fait, ces courbes sont la généralisation complète des courbes de Bézier. Elles possèdent les qualités



des courbes de Bézier mais permettent un contrôle local de la courbe. L'ordre de continuité des B-splines est fixé par l'utilisateur. Lorsqu'il est égal au nombre de points de contrôle, on obtient alors le cas particulier des courbes de Bézier. La représentation mathématique des B-splines [98] introduit également la notion de vecteur noeud,  $T$ , qui permet de spécifier la concentration de l'influence des points de contrôle à des sections spécifiques de la courbe (e.g. bord d'attaque et bord de fuite). Un très grand nombre de travaux récents fait l'emploi des B-splines pour la modélisation de profil aérodynamique [4, 50, 68, 69]. Ces travaux utilisent entre 15 et 25 points de contrôle mais ne tirent pas avantage du contrôle local des B-splines (le poids des points est uniforme sur toute la courbe). Ces travaux sont donc relativement équivalents aux travaux réalisés sur la base de courbes de Bézier et les représentations obtenues n'ont pas une flexibilité géométrique supérieure pour un nombre de points donné.

#### 2.2.1.4 NURBS

Les NURBS (NonUniform Rational B-Spline) font partie de la famille des courbes rationnelles. Ces courbes sont définies par le ratio de polynômes et sont considérées comme une représentation unifiée des courbes paramétriques qui permet de définir une très grande variété de courbes. Les NURBS ont une formulation mathématique [72] proche des B-splines à la différence que l'influence des points de contrôle sur la courbe est pondérée par un facteur poids réel  $h_i$  qui permet un contrôle local fin de la courbe, ce qui leur confère une très grande flexibilité géométrique. Les NURBS sont des courbes relativement récentes et malgré leurs grandes qualités, seuls deux articles rapportent leur emploi dans la représentation géométrique de profil [57, 67]. Deux problèmes résident toutefois dans cette paramétrisation :

- les courbes ne passent pas par les points de contrôle : il est difficile d'imposer des contraintes géométriques sur la position de ces points;

- rien ne garantit la bijectivité de cette représentation et il est possible de trouver deux paramétrisations différentes pour une seule géométrie (dans une limite de tolérance géométrique);
- l'espace de recherche décrit par une représentation par NURBS peut être complexe et présenter des minima locaux nécessitant l'emploi d'algorithmes d'optimisation sophistiqués.

Bien que très générales et puissantes, les NURBS nécessitent réflexion pour être utilisées avec succès pour la modélisation de profil aérodynamique.

### **2.2.2 Solution de l'écoulement autour du profil**

L'obtention de la solution de l'écoulement autour d'un profil comporte deux aspects inter-reliés : (i) le modèle mathématique et (ii) la méthode numérique. Le rôle du modèle mathématique est de décrire sous forme d'équations mathématiques continues la physique de l'écoulement. Tel que mentionné précédemment, de par le type d'applications projetées et l'expérience du groupe de recherche, les écoulements autour des profils considérés dans cette recherche seront de type stationnaire, laminaire et incompressible.

La méthode numérique a pour but de résoudre de façon discrète le modèle mathématique préalablement établi. Au cours des quinze dernières années, les méthodes numériques en mécanique des fluides ont acquis une relative maturité qui leur confère robustesse, fiabilité et bonne précision [46]. Toutefois, un des principaux obstacles à l'utilisation pratique systématique d'une procédure d'optimisation en aérodynamique réside dans le volume de calcul élevé associé à la méthode numérique en mécanique des fluides. Ainsi c'est cette étape du processus d'optimisation (voir figure 2) qui représente la fraction la plus importante du temps de calcul global. Le succès et l'efficacité d'une OA dépend en grande partie de la vitesse de convergence de la méthode numérique pour le calcul de l'écoulement et cet aspect représente un des principaux objectifs à atteindre dans ce travail.

### 2.2.2.1 Modèle mathématique

Le choix d'un modèle mathématique adéquat pour la résolution d'un problème donné repose en grande partie sur la physique du phénomène étudié. Le compromis à atteindre consiste à choisir un modèle capable de représenter correctement la physique du problème pour une complexité raisonnable. Bien qu'il soit instructif de consulter la littérature quant aux diverses modélisations utilisées précédemment dans le cadre d'optimisation aérodynamique multi-critères, le choix du modèle mathématique doit uniquement correspondre à l'application envisagée. La très vaste majorité des travaux en optimisation aérodynamique concerne le domaine des écoulements compressibles. Deux modélisations sont alors principalement employées, les équations d'Euler [8, 39, 58, 65] pour les modélisations non-visqueuses et les équations de Navier-Stokes [4, 15, 48, 65, 68, 87] couplées à un modèle de turbulence pour la contrepartie visqueuse. Peu de travaux en OA traitent des écoulements incompressibles et laminaires tels que ceux envisagés dans cette recherche [55]. Ainsi, en absence de turbulence, la représentation mathématique de tels écoulements est décrite par les équations stationnaires de Navier-Stokes. Ce travail constitue une première étape dans l'OA de profil éolien et devrait être poursuivi dans l'avenir par l'ajout d'un modèle de turbulence. Bien que l'introduction de la turbulence implique de nouvelles problématiques, d'un point de vue conceptuel, le processus d'OA demeure similaire.

### 2.2.2.2 Méthode numérique

En mécanique des fluides, l'objectif d'une méthode numérique consiste à obtenir la solution de l'écoulement en terme de valeur des variables dépendantes (vitesse, pression, température...) en des points discrets du domaine physique. Ces valeurs discrètes sont liées entre elles par le biais d'équations algébriques obtenues par la discrétisation des équations aux dérivées partielles constituant le modèle mathématique. Le système d'équations algébriques discrétisées ainsi obtenu est résolu par l'application d'un algorithme de solution approprié. L'aspect principal qui distingue une méthode numérique d'une autre

réside dans la procédure par laquelle sont obtenues les équations algébriques discrétisées. Il existe trois grandes familles de méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes : (i) méthode des différences finies, (ii) méthode des éléments finis et (iii) méthode des volumes finis. On retiendra que les méthodes des différences finies s'appuient sur les développements limités en série de Taylor et que les méthodes d'éléments et de volumes finis sont basés sur la théorie des résidus pondérés [26]. Avant de poursuivre plus loin cette discussion concernant la méthode numérique, il est nécessaire d'établir les bases sur lesquelles repose ce travail. Le point de départ du développement de la méthode numérique utilisée dans ce travail est une méthode aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEM) basée sur une formulation aux variables primitives, à collocation d'ordre égal utilisant l'algorithme de résolution séquentiel SIMPLER [71]. Cette méthode emploie directement les composantes de la vitesse et la pression; ces variables dépendantes sont calculées aux mêmes noeuds du maillage d'éléments finis et sont interpolées sur les mêmes éléments. Cette méthode est basée sur les travaux de Saabas et Baliga [81] et de Masson et al. [59].

La formulation d'une telle méthode de CVFEM pour la mécanique des fluides se compose de cinq étapes principales : (i) la discrétisation du domaine de calcul en éléments , (ii) la construction de volumes de contrôle qui encadrent les noeuds du maillage d'éléments finis, (iii) la prescription de fonctions d'interpolation sur les éléments pour les variables dépendantes et les propriétés thermophysiques du fluide, (iv) la dérivation des approximations algébriques des équations de mécanique des fluides grâce à une procédure d'assemblage élément par élément, (v) la prescription d'une procédure pour résoudre ces équations algébriques. Une description complète et détaillée de cette méthode est faite dans les références [7, 59, 81]. Ainsi, les méthodes de CVFEM combinent des concepts associés traditionnellement aux méthodes de volumes finis et aux méthodes d'éléments finis. D'un point de vue général, les méthodes de volumes finis (FVM), d'éléments finis (FEM) et aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEM) peuvent toutes être considérées comme des cas particuliers de la méthode des résidus pondérés tel que le suggèrent Finlayson et Scri-

ven [26] et Zienkiewicz [99]. Même si chacune de ces trois méthodes possède ses forces et faiblesses propres, à ce jour, le choix de l'une d'elles repose sur l'expérience et l'intérêt personnel du chercheur plutôt que sur la base d'avantages d'une méthode sur une autre. Ainsi, le choix des CVFEMs [5, 59] pour ce travail s'appuie sur la solide connaissance et les succès obtenus par le groupe de recherche AÉMN lors d'applications pratiques antérieures [3, 59].

Tel qu'énoncé précédemment au chapitre 2.2.2, la vitesse de convergence, l'efficacité et la robustesse de la méthode de calcul numérique sont des qualités essentielles à la réussite d'une procédure d'optimisation aérodynamique. Pour réaliser ces objectifs, il existe une multitude de techniques d'accélération de la vitesse de convergence qui concernent principalement quatre domaines :

- l'algorithmique de la méthode [22, 70, 95];
- les méthodes multi-grilles et de correction par blocs [11, 61];
- les méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires [24, 82, 85];
- la parallélisation de code [86].

De toutes ces techniques d'accélération de la convergence, il faut identifier celle qui aura l'impact le plus marquant sur la vitesse de convergence et la robustesse de la méthode numérique. Ainsi, la nature séquentielle de l'algorithme de résolution des CVFEM [5, 59] apparaît être une des limites importantes de cette méthode telle que présentée à la section suivante. Seul cet aspect algorithmique de la méthode sera abordé dans ce travail afin d'en accroître les performances.

### **Formulation fortement couplée avec linéarisation de Newton**

La principale difficulté dans la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles réside dans l'absence de dérivée seconde ou temporelle en pression. Ainsi, la pression n'apparaît que sous la forme de son gradient dans les équations de quantité de mouvement et n'est spécifiée que de manière indirecte dans l'équation de continuité. Ceci implique

qu'il n'existe pas d'équation de transport spécifique à la pression et que seule sa valeur relative est pertinente. La nature particulière de la pression dans les équations incompressibles de Navier-Stokes est responsable de leurs difficultés à être résolues numériquement. Outre les méthodes vorticité-courant et de compressibilité artificielle, l'approche la plus utilisée pour remédier à ce problème est basée sur la formulation d'une équation de Poisson pour la pression. Dans cette approche, les équations de quantité de mouvement et de continuité sont résolues séquentiellement et le couplage pression-vitesse est obtenu itérativement. Ainsi, d'itération en itération, l'ajustement successif des champs de vitesses  $(u, v, w)$  et de pression  $(p)$  permet d'obtenir à convergence une solution respectant les équations de Navier-Stokes. Des algorithmes basés sur cette approche tels que MAC [42] et SIMPLE [71] ont démontré leurs capacités à résoudre des problèmes complexes. Toutefois, il apparaît que le couplage pression-vitesse représente le maillon faible de ces méthodes et contrôle partiellement leurs vitesses de convergence. Cette faiblesse devient critique lorsque le nombre de points de maillage est élevé. Pour surmonter ce problème, de nombreux algorithmes séquentiels ont été développés dans l'optique d'améliorer le couplage vitesse-pression : SIMPLER [71], SIMPLEC [94], PISO [45]. Bien qu'ayant significativement amélioré la robustesse et la vitesse de convergence par rapport aux premiers algorithmes, toutes ces tentatives demeurent basées sur une approche de résolution séquentielle et ne règlent pas fondamentalement le problème de couplage vitesse-pression. Ces méthodes nécessitent toujours la prescription de facteurs de relaxation et l'ajustement de paramètres de résolution pour assurer leurs convergences. L'algorithme SIVA [14] fut la première tentative de résolution couplée des équations de quantité de mouvement et de continuité. Tout comme des algorithmes semblables plus récents [43], SIVA utilise une procédure de résolution directionnelle apparentée à celles des méthodes de couches limites et son application est restreinte aux écoulements partiellement paraboliques. De plus, dans ces méthodes, le couplage des variables dépendantes n'est effectué que sur des sous-domaines restreints ce qui entraîne un faible gain par rapport aux méthodes séquentielles. Ainsi, il apparaît que pour donner des améliorations significatives, le couplage doit

avoir lieu simultanément sur l'ensemble du domaine de calcul, ce qui correspond à un couplage dit "fort" [22]. D'autres travaux ont entrepris de coupler uniquement les équations de quantité de mouvement sur l'ensemble du domaine de calcul [35, 63]. Ces tentatives ne démontrent que des gains de performance limités par rapport aux algorithmes séquentiels.

Deux principales difficultés interdisaient jusqu'à récemment la mise en oeuvre d'algorithmes de résolution fortement couplés : (i) le stockage informatique et (ii) la résolution du système linéaire. La croissance constante des moyens de calculs autorise actuellement la résolution de presque tous les problèmes pratiques bi-dimensionnels par un algorithme fortement couplé et laisse entrevoir une situation semblable pour le cas tri-dimensionnel dans un avenir rapproché. Les coûts en temps CPU et en espace mémoire des méthodes de résolution directe de systèmes linéaires limitent sensiblement leurs utilisations pratiques et imposent l'emploi de méthodes itératives comme seule alternative. Des progrès récents importants ont été réalisés dans ce domaine permettant la résolution efficace et robuste des systèmes linéaires creux de grandes dimensions associés aux méthodes numériques en mécanique des fluides [24, 82]. Si ces méthodes de pré-conditionnement et de résolution permettent de résoudre la quasi-totalité des systèmes linéaires pour des problèmes bi-dimensionnels, des progrès sont encore nécessaires à leur application pratique tri-dimensionnelle. Dans ce contexte, des formulations fortement couplées ont été développées pour la résolution des équations incompressibles de Navier-Stokes [22, 32, 62, 70, 73, 95]. Les résultats diffèrent selon les auteurs et leurs formulations mais tous reconnaissent le gain de robustesse des méthodes fortement couplées par rapport aux algorithmes de type séquentiel. Pour les méthodes fortement couplées basées sur une formulation à co-location avec équation de Poisson en pression [22, 70, 73], il apparaît que les méthodes fortement couplées sont considérablement plus rapides que les méthodes séquentielles pour un nombre de points de calcul donné, et surtout que la croissance du temps de calcul par points suit une loi linéaire alors que les méthodes séquentielles semblent posséder un comportement quadratique [22, 41]. Les formulations n'in-

introduisant pas d'équation de Poisson en pression et utilisant des maillages décalés [70,95] semblent plus mitigées quant au gain de vitesse associé à la résolution couplée. Ces méthodes semblent se heurter à des difficultés de convergence de la méthode de résolution du système linéaire découlant du mauvais conditionnement du système matriciel. Ainsi, l'absence d'une équation de pression entraîne la présence de zéros sur la diagonale pour l'équation de continuité. Ces zéros peuvent être éliminés par une technique de réorganisation des variables [70] ou en pénalisant l'équation de continuité [96] mais dans ces deux cas, ces traitements sont palliatifs alors que l'utilisation d'une équation de pression élimine la source du problème.

Un autre avantage de la résolution couplée réside dans la possibilité du traitement implicite des non-linéarités. Dans le contexte d'une résolution couplée, ces dernières peuvent désormais être traitées par une méthode de Newton plutôt que par une linéarisation de Picard classiquement utilisée dans les méthodes séquentielles. Cette approche peut résulter en des gains substantiels de vitesse de convergence [52, 62, 95] puisque, lorsque proche de la solution, la linéarisation de Newton possède une convergence quadratique alors que celle de Picard est linéaire.

### **2.2.3 Différenciation de la fonction objectif**

L'utilisation d'un algorithme d'optimisation basé sur le gradient nécessite la connaissance du gradient de la fonction objectif par rapport aux paramètres de conception définissant la géométrie du profil. L'obtention de ces dérivées représente une problématique centrale des récents travaux en optimisation aérodynamique [8, 47, 65]. Le succès de la procédure d'optimisation dépend de la précision de ces dérivées et de l'efficacité de la méthode par laquelle elles sont calculées. Il existe plusieurs approches pour obtenir le gradient de la fonction objectif. La méthode de différenciation la plus appropriée pour ce travail est celle qui tout en nécessitant des coûts de calcul raisonnable, possède flexibilité et automatisation. Un effort particulier sera apporté afin de profiter des connaissances spécifiques à la



méthode numérique afin de réduire l'effort de calcul nécessaire à l'obtention des dérivées de la fonction objectif. On recense deux grandes approches pour le calcul des dérivées de la fonction objectif en OA : la méthode des sensibilités et la méthode des variables adjointes.

### 2.2.3.1 Méthode des sensibilités

Tel qu'énoncé précédemment, lors d'une OA, la performance d'un profil est évaluée par le biais d'une fonction objectif  $\mathcal{F}$  établie sur la base de propriétés aérodynamiques ( $C_L$ ,  $C_D$ ). Ces propriétés aérodynamiques sont elles mêmes résultantes des variables de l'écoulement  $\phi$  (vitesse, pression, température) et de la géométrie du profil (i.e. position des points de contrôle de la représentation mathématique) qui peut être représentée par un vecteur  $x_c$ . Par conséquent, la fonction objectif est définie par :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi, x_c) \quad (2.1)$$

et sa dérivée par rapport au vecteur  $x_c$  définissant la géométrie du profil est donnée par :

$$\left. \frac{D\mathcal{F}}{Dx_c} \right|_{x_c^{(n)}} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_c} \right|_{x_c^{(n)}} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right|_{x_c^{(n)}} \left. \frac{d\phi}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}} \quad (2.2)$$

L'indice  $(n)$  indique que les dérivées sont obtenues pour une géométrie spécifique  $x_c^{(n)}$ . Les termes  $\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_c} \right|_{x_c^{(n)}}$  et  $\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right|_{x_c^{(n)}}$  sont en général relativement simples à obtenir par différenciation analytique mais la difficulté réside dans l'évaluation du terme  $\left. \frac{d\phi}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}}$ . Ce terme,  $\left. \frac{d\phi}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}}$ , appelé sensibilité représente les dérivées des variables dépendantes de l'écoulement  $\phi$  par rapport aux paramètres géométriques de conception  $x_c$ . La technique des différences finies constitue l'approche la plus directe pour évaluer les sensibilités. Cette méthode de calcul brut consiste en de multiples évaluations numériques de l'écoulement en perturbant successivement un des paramètres géométriques jusqu'à ce que l'ensemble soit complété. Les sensibilités sont approximées par l'application d'une simple formule

de différenciation numérique :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_{ci}} \right|_{x_c^{(n)}} \approx \frac{\phi(x_c^{(n)} + h_i) - \phi(x_c^{(n)})}{h_i} \quad (2.3)$$

Par différences finies, l'évaluation du gradient complet d'une fonction objectif contenant  $m$  variables d'entrée nécessite donc  $m + 1$  calculs numériques aérodynamiques. En deux dimensions, le nombre  $m$  de paramètres nécessaires à la représentation de la géométrie d'un profil est d'environ 30, l'évaluation du gradient par différences finies représente donc une somme substantielle de calculs. De plus cette approche est sujette aux erreurs d'arrondi et nécessite l'ajustement de l'amplitude de la perturbation  $h_i$  pour donner des résultats cohérents [8]. Ainsi, bien que triviale à mettre en oeuvre, la méthode des différences finies est peu employée en OA de par la charge de calcul trop importante qui l'accompagne.

Une approche alternative pour l'évaluation des sensibilités consiste à différencier l'équation d'état,  $R(\phi, x_c) = 0$  (i.e. équation de Navier-Stokes), afin d'obtenir l'équation de sensibilité (ES) :

$$\left. \frac{dR(\phi, x_c)}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}} = \left. \frac{\partial R}{\partial x_c} \right|_{x_c^{(n)}} + \left( \left. \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|_{x_c^{(n)}} \right) \left. \frac{d\phi}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}} = 0 \quad (2.4)$$

$$\left( \left. \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|_{x_c^{(n)}} \right) \left. \frac{d\phi}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}} = - \left. \frac{\partial R}{\partial x_c} \right|_{x_c^{(n)}} \quad (2.5)$$

Les termes  $\left( \left. \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|_{x_c^{(n)}} \right)$  et  $\left. \frac{\partial R}{\partial x_c} \right|_{x_c^{(n)}}$  dépendent uniquement de  $x_c^{(n)}$  et  $\phi(x_c^{(n)})$  de telle sorte qu'une seule solution de l'écoulement est requise à  $x_c^{(n)}$  pour résoudre les ES. Il existe une ES pour chaque paramètre de conception. Ainsi, pour une modélisation géométrique à  $m$  paramètres la connaissance du gradient complet implique la solution de  $m$  ES. Toutefois, le système d'ES est linéaire pour les sensibilités  $\left. \frac{d\phi}{dx_c} \right|_{x_c^{(n)}}$  et l'opérateur de gauche  $\left( \left. \frac{\partial R}{\partial \phi} \right|_{x_c^{(n)}} \right)$  est le même quelque soit le paramètre de conception considéré. Par consé-

quent, la résolution d'une ES nécessite un effort de calcul bien moindre que celui associé au calcul de l'écoulement. La méthode des ES a été utilisée avec succès en OA tel qu'en témoignent de nombreuses publications [37,51,65]. Toutefois, sa faiblesse provient du fait que lorsque le nombre de paramètres de conception devient important, la charge de calcul augmente proportionnellement et peut compromettre le succès global de l'optimisation.

### 2.2.3.2 Méthode des variables adjointes

Le gradient de la fonction objectif peut être aussi évalué par l'usage d'une équation adjointe. En utilisant une technique issue de la théorie du contrôle, l'équation d'état  $R(\phi, x_c) = 0$  qui régit la physique de l'écoulement est introduite comme contrainte au problème de différenciation de la fonction objectif par l'introduction du multiplicateur de Lagrange  $\psi$ . Ainsi on augmente l'équation (2.2) par l'équation (2.4) :

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dx_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\bigg|_{x_c^{(n)}} \frac{d\phi}{dx_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} - \psi_{x_c^{(n)}}^T \left( \frac{\partial R}{\partial x_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} + \frac{\partial R}{\partial\phi}\bigg|_{x_c^{(n)}} \frac{d\phi}{dx_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dx_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} = \left( \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\bigg|_{x_c^{(n)}} - \psi_{x_c^{(n)}}^T \frac{\partial R}{\partial\phi}\bigg|_{x_c^{(n)}} \right) \frac{d\phi}{dx_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} + \left( \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} - \psi_{x_c^{(n)}}^T \frac{\partial R}{\partial x_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} \right) \quad (2.7)$$

En choisissant  $\psi_{x_c^{(n)}}$  pour satisfaire l'équation adjointe (EA) suivante :

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial\phi} \right]_{x_c^{(n)}}^T \psi_{x_c^{(n)}} = \left[ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi} \right]_{x_c^{(n)}}^T \quad (2.8)$$

le premier terme de l'équation (2.7) disparaît et on obtient l'expression du gradient de la fonction objectif :

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dx_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} - \psi_{x_c^{(n)}}^T \frac{\partial R}{\partial x_c}\bigg|_{x_c^{(n)}} \quad (2.9)$$

Comme pour l'ES, les équations (2.8) et (2.9) dépendent uniquement de  $x_c^{(n)}$  et  $\phi(x_c^{(n)})$  de telle sorte qu'une seule solution de l'écoulement est requise à  $x_c^{(n)}$  pour obtenir le gradient complet de la fonction objectif. De plus l'équation adjointe (2.8) n'est pas dé-

pendante de  $x_c$ , ce qui implique que la résolution d'une seule équation adjointe permet l'évaluation de gradient complet de  $\mathcal{F}$  quelque soit le nombre de paramètres de conception. Une fois l'équation adjointe résolue (2.8), le gradient de  $\mathcal{F}$  est obtenu par un simple produit matrice/vecteur donné par l'équation (2.9). L'équation adjointe (2.8) a la même nature que celles de Navier-Stokes et pourra être résolue par une méthode similaire. Le coût numérique de la solution de l'équation adjointe se rapproche de celui de la résolution des équations de Navier-Stokes indépendamment du nombre de variables de conception. Ainsi, pour la résolution de problèmes avec un nombre élevé de paramètres de conception, la méthode de l'équation adjointe requiert un effort de calcul inférieur par rapport à la méthode des sensibilités. Cette approche très attirante par son faible coût de calcul recèle cependant quelques inconvénients. Le temps de développement et de mise en oeuvre d'une méthode adjointe est long et peut présenter des difficultés au niveau de l'imposition des conditions aux frontières. De plus, chaque nouvelle fonction objectif nécessite la mise en oeuvre d'un nouveau système adjoint qui peut demander plusieurs mois de développement à un ingénieur/chercheur. C'est ce manque de flexibilité et de polyvalence qui a empêché ces méthodes de franchir le pas du domaine de la recherche à celui de l'application pratique systématique [47].

### 2.2.3.3 Discrétiser puis différencier ou différencier puis discrétiser (équations discrètes ou continues)

Les méthodes des sensibilités ou de l'équation adjointe impliquent toutes deux la différenciation de l'équation d'état  $R(\phi, x_c)$  (i.e. équations de Navier-Stokes) par rapport aux paramètres de conception. Cette opération peut être effectuée avant ou après la discrétisation de l'équation d'état par la méthode de résolution numérique de l'écoulement. Dans le premier cas, l'équation d'état aux dérivées partielles est différenciée afin d'obtenir l'ES ou l'EA. Puis, les équations continues de sensibilité ou les équations adjointes obtenues sont discrétisées et résolues par une méthode numérique similaire à celle utilisée pour la résolution de l'écoulement. Alternativement, il est possible d'obtenir l'ES et l'EA à partir des

équations d'état discrétisées. L'ordre entre la différenciation et la discrétisation revêt de l'importance puisque ces deux étapes ne sont pas commutatives et les deux approches résultantes donnent des systèmes et des résultats différents. A la limite, lorsque le nombre de points de maillage tend vers l'infini, les deux approches donnent le même résultat. Néanmoins, pour des maillages de dimension finie, des différences significatives peuvent être observées en fonction de l'ordre des étapes de différenciation et de discrétisation [40]. Le qualificatif discret est employé pour faire référence aux équations établies par l'approche discrétisée puis différenciée alors que celui de continu est utilisé pour l'approche inverse. Ces deux stratégies possèdent les forces et faiblesses suivantes :

- l'approche discrète est la seule qui produit des dérivées de la fonction objectif consistantes par rapport à la méthode de résolution numérique de l'écoulement. L'approche continue peut quant à elle donner des gradients erronés;
- l'emploi d'un logiciel de différenciation automatique (voir section suivante) peut simplifier la mise en oeuvre d'une méthode discrète;
- la différenciation de l'équation d'état discrétisée introduit le mouvement du maillage dans l'ES et l'EA pour le cas d'optimisation de forme alors que cette information n'est pas requise pour l'approche différenciée puis discrétisée;
- l'approche discrète implique l'utilisation du même maillage pour le calcul de l'écoulement et des dérivées alors qu'il est établi que deux maillages distincts seraient préférables. L'approche continue permet l'usage d'un maillage spécifique adapté aux équations de ES et EA.

Il est difficile d'établir la supériorité d'une approche par rapport à l'autre sur la base de leurs qualités. Cependant, l'utilisation de l'approche discrète permet d'utiliser les connaissances spécifiques propres à la méthode numérique en mécanique des fluides (CVFEM) et ainsi d'améliorer l'efficacité du code de calcul des dérivées.

#### 2.2.3.4 Méthode de différenciation automatique

La différenciation d'équations discrétisées peut représenter un temps de mise en oeuvre substantiel dans le cas d'équations telles que les équations de Navier-Stokes qui nécessitent l'usage de fonctions d'interpolation élaborées pour leurs résolutions numériques. Cet effort de développement peut être allégé par l'usage d'un logiciel de différenciation automatique. Les techniques de différenciation automatique sont basées sur le fait que quelque soit son degré de complexité, toute fonction calculée sur un ordinateur est exécutée comme une séquence (potentiellement très longue) d'opérations élémentaires telles que l'addition ou la multiplication et de fonctions élémentaires telles que le sinus ou le cosinus. Ainsi, en appliquant la règle de la chaîne

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(g(t)) \right|_{t=t_0} = \left( \left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{F}(s) \right|_{s=g(t_0)} \right) \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} g(t) \right|_{t=t_0} \right)$$

de façon répétitive, pour toute la séquence d'opérations élémentaires, on arrive à calculer les dérivées de  $\mathcal{F}$  de manière exacte au sens numérique [10]. L'usage d'un logiciel de différenciation automatique élimine la possibilité d'erreurs d'arrondis associées à une méthode de différences finies tout en limitant le temps de développement du code de calcul des dérivées de la fonction objectif. C'est pour ces raisons qu'on observe un intérêt croissant pour ces méthodes en optimisation aérodynamique [15, 16, 64, 65]. Malgré ces avantages, il demeure qu'un code élaboré par différenciation automatique nécessite plus de ressources informatiques (espace mémoire et temps de calcul) qu'un code similaire développé manuellement. De plus, lorsque l'algorithme de résolution de la méthode numérique est complexe, l'utilisation de la différenciation automatique et les codes de différenciation résultants deviennent tout aussi complexes ce qui les rend difficilement gérables et exploitables.

### 2.2.4 Algorithme d'optimisation

Il existe une très grande variété de techniques d'optimisation applicables à différentes catégories de problèmes [9]. L'optimisation aérodynamique d'un profil correspond à une optimisation non-linéaire avec contraintes linéaires. Pour ce type de problème, on distingue deux familles de méthodes susceptibles d'être appliquées : (i) méthodes basées sur le gradient, (ii) méthodes directes. Une des principales difficultés liées à l'optimisation aérodynamique provient du fait que la fonction objectif à optimiser n'est pas convexe et présente des optima locaux. Il est par conséquent difficile de trouver le minimum ou le maximum global de cette fonction. Pour ce type de problème, la procédure d'optimisation choisie doit permettre un vaste domaine de recherche dans l'espace de solution tout en requérant un nombre d'itérations minimum, deux qualités contradictoires. Rappelons que pour chaque itération de l'algorithme d'optimisation est associé au minimum un calcul aérodynamique et potentiellement le calcul du gradient de la fonction objectif d'où l'importance de limiter le nombre d'itérations de l'algorithme de recherche. Les deux sections suivantes recensent les algorithmes d'optimisation et leurs utilisations en aérodynamique.

#### 2.2.4.1 Méthodes basées sur le gradient

Cette famille de méthodes d'optimisation regroupe toutes les techniques faisant l'emploi du gradient ou du Hessian dans leur algorithme. Ces méthodes nécessitent la spécification d'un point de départ des variables de conception, à partir duquel des déplacements successifs dans l'espace de solutions permettront de se diriger vers un optimum de la fonction. La détermination des valeurs des variables de conception d'une itération à l'autre est guidée par les valeurs de la fonction objectif  $\mathcal{F}(g)$  et de son gradient  $\nabla \mathcal{F}(x_c)$ . C'est dans ce processus que se distinguent les différentes méthodes d'optimisation. L'imposition de contraintes peut être faite par projection du gradient sur les plans de contrainte, méthode de Rosen ou par l'intégration d'une fonction de pénalité [9]. Le critère d'arrêt de ces méthodes pour déterminer la fin de l'optimisation et la présence d'un optimum est donné

par :

$$|\nabla \mathcal{F}(x_c)| \leq \epsilon \text{ avec } \epsilon \approx 0$$

où  $\epsilon$  est un critère de convergence. Parmi les méthodes basées sur le gradient, on retrouve :

- méthode de la descente du gradient [9, 17];
- méthode du gradient conjugué [27, 29];
- méthode quasi-Newton (Davidson-Fletcher-Powell / Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [21, 27];
- méthode des faisceaux [31, 49].

Les méthodes de la descente du gradient [48], les méthodes quasi-Newton [8, 68, 88] et les méthodes des faisceaux [47] ont déjà été utilisées avec succès pour l'optimisation aérodynamique de profil. Il apparaît difficile de comparer entre elles ces méthodes de manière universelle puisque la performance de ces algorithmes d'optimisation est hautement dépendante du problème résolu. Néanmoins, il semble que les méthodes quasi-Newton et de faisceaux soient en général plus rapides à converger que les autres précédemment citées [49].

Les méthodes basées sur le gradient possèdent toutefois quelques faiblesses qui limitent leur efficacité. Ces méthodes sont locales, c'est à dire que rien ne garantit que l'optimum trouvé corresponde à l'optimum global de tout l'espace de solution. Ces méthodes sont donc dépendantes du choix arbitraire du point de départ de l'optimisation. De plus ces méthodes nécessitent la connaissance du gradient de la fonction objectif, ce qui représente un effort de calcul supplémentaire. Il faut aussi noter que ces méthodes possèdent une robustesse limitée et peuvent converger très lentement selon la forme de la fonction à optimiser. En contrepartie, lorsque des conditions favorables sont réunies, ces méthodes sont généralement très rapides à converger vers l'optimum de la fonction.



#### 2.2.4.2 Méthodes directes

En opposition aux méthodes basées sur le gradient, les méthodes directes ne nécessitent pas la connaissance du gradient. C'est le seul point commun de ces méthodes. En aérodynamique, seules deux méthodes directes semblent présenter de l'intérêt, la méthode du simplex de Nelder et Mead [88] et surtout les algorithmes génétiques [23,50,58,78,79]. La méthode du simplex est une méthode de recherche locale qui, à partir de  $m + 1$  points de calcul dans l'espace de solution à  $m$  variables, détermine les points suivants de recherche par un processus de réflexion, d'expansion ou de contraction [9, 66]. L'optimisation se termine lorsque la distance entre les points de calcul devient inférieure à une valeur seuil. Cette méthode est très robuste à converger mais peut nécessiter beaucoup d'itérations de calcul. Les algorithmes génétiques développés dans les années 60 par Holland [44] sont basés sur la théorie Darwinienne de l'évolution. Ainsi, à partir d'une population initiale aléatoire de solutions, un processus de sélection est effectué sur la base des valeurs de la fonction objectif de chaque individu. Les solutions "évoluent" donc de génération en génération par des processus de croisement et de mutation. L'algorithme se termine lorsque la population devient uniforme et donc "adaptée" au problème donné. Lorsque correctement formulée, cette méthode d'optimisation possède l'avantage de faire une recherche globale sur l'ensemble de l'espace de recherche. Sans garantir la globalité de l'optimum, les algorithmes génétiques sont probablement les méthodes qui explorent de la façon la plus complète l'espace de recherche. Cette qualité est tout de même accompagnée d'un très grand volume de calcul. Il existe toutefois des approches hybrides relativement nouvelles combinant les algorithmes génétiques et les méthodes de gradient qui semblent donner des résultats très encourageants même si peu d'articles rapportent leur emploi [56, 74, 88].

### 2.3 Méthodologie

Cette section présente une vue d'ensemble de la méthodologie employée dans ce travail pour l'optimisation aérodynamique des performances d'un profil. Les grandes lignes de la

méthode ainsi que les principales hypothèses simplificatrices y sont présentées. Les quatre chapitres suivants développent en détails les aspects originaux et essentiels à la bonne compréhension de la méthode.

Tel que présenté à l'organigramme de la figure 2, de par son caractère multi-disciplinaire, le processus d'optimisation aérodynamique peut être décomposé en quatre sous-éléments :

1. modélisation géométrique de profils aérodynamiques et génération de maillage;
2. solution de l'écoulement autour du profil;
3. différenciation de la fonction objectif;
4. algorithme d'optimisation.

Ainsi, afin de réduire le nombre de variables nécessaires à la définition de la géométrie de profils aérodynamiques, ces derniers sont approximés par des courbes B-Splines Non-Uniforme (NUBS) [72] possédant 23 points de contrôle. La méthode de résolution numérique de l'écoulement fait usage de maillages structurés. Un maillage structuré en C est employé pour l'écoulement autour des profils. Ce maillage est construit sur la base de la solution non-visqueuse de l'écoulement [60] par la technique d'interpolation transfinie [53]. Un lissage elliptique de type TTM [53, 89] est appliqué afin d'améliorer les qualités géométriques du maillage.

De par le type d'applications projetées (i.e. conception de pale d'éolienne) et l'expérience limitée du groupe AÉMN en OA, les écoulements autour des profils considérés dans ce travail sont modélisés par les équations incompressibles stationnaires/laminaires de Navier-Stokes. La solution numérique de ces équations est obtenue par l'utilisation d'une méthode aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEM) à collocation d'ordre égale basée sur un algorithme de résolution couplé et un traitement implicite de type Newton des non-linéarités [2]. La fonction objectif qui évalue la performance des profils est construite sur la base des propriétés aérodynamiques ( $C_L/C_D$ ) elles mêmes établies à partir des variables de la solution numérique de l'écoulement. La méthode d'optimisation utilisée pour

l'optimisation aérodynamique est l'algorithme DFP (Davidson-Fletcher-Powell) de type quasi-Newton [21, 27]. Cet algorithme fait partie de la famille des méthodes d'optimisation basées sur le gradient et sa mise en oeuvre nécessite la connaissance du gradient de la fonction objectif par rapport aux variables géométriques de conception. Ces dérivées de la fonction objectif sont obtenues par la résolution d'un système d'équations de sensibilité discrète établi par la technique des récurrences simplifiées [36, 38].

D'un point de vue général, l'approche développée pour l'optimisation aérodynamique de profil répond aux objectifs d'efficacité et d'automatisation préalablement établis au chapitre précédent.

## **CHAPITRE 3**

### **MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DE PROFIL ET GÉNÉRATION DE MAILLAGE**

Le présent chapitre présente successivement les méthodes employées pour la modélisation géométrique de profil et la génération de maillage. Dans une première section, le modèle mathématique de représentation de profil est développé. Puis, sa mise en oeuvre numérique est présentée. Cette première section se termine par la démonstration de la validité de la méthode proposée à travers l'étude de 16 profils aérodynamiques connus. La seconde section présente la technique de génération de maillage en C autour des profils aérodynamiques discrets obtenus par la modélisation préalablement établie.

#### **3.1 Modélisation géométrique de profil par l'utilisation de NUBS**

##### **3.1.1 Modèle mathématique**

Tel qu'énoncé précédemment, la modélisation géométrique de profil à l'aide de courbes mathématiques représente un élément essentiel au succès d'une procédure d'optimisation aérodynamique. La représentation mathématique de la géométrie d'un profil permet de réduire le nombre de variables de conception nécessaires à sa définition par rapport à une représentation discrète par points. Le nombre d'itérations des méthodes de recherche en optimisation pouvant être directement corrélé au nombre de variables de conception implique que la modélisation géométrique de profil influence directement la charge de calcul associée au processus d'OA [49]. De plus, tout en réduisant le nombre de variables de conception, la modélisation de profil doit également permettre une grande flexibilité afin de représenter une vaste gamme de profils aux géométries variées. La modélisation géométrique doit également contribuer au bon conditionnement du problème d'optimisation en ne présentant pas de discontinuités et en limitant la présence de minima locaux. Les NURBS (NonUniform Rational B-Spline) sont considérées comme une représentation unifiée et

complète de toutes les courbes mathématiques [72]. Les NURBS sont une extension des B-splines et reprennent les mêmes fonctions d'interpolation. Si  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  représente une séquence de nombres réels croissants, i.e.  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Le vecteur  $T$  est appelé vecteur noeud et ses éléments constituent les noeuds. La fonction de base des NURBS ou B-Splines de degré  $d'$  associé au noeud  $i$ , dénoté  $N_{i,d'}(t)$ , est définie par :

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$N_{i,d'}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d'} - t_i} N_{i,d'-1}(t) + \frac{t_{i+d'+1} - t}{t_{i+d'+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d'-1}(t) \quad (3.2)$$

Remarques :

- $N_{i,0}(t)$  est une fonction échelon nulle partout sauf sur l'intervalle,  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ;
- pour  $d' > 0$ ,  $N_{i,d'}(t)$  est une combinaison linéaire récursive de fonctions de base d'ordre  $d' - 1$ ;
- le calcul de fonctions de base nécessite la spécification du vecteur noeud  $T$  ainsi que du degré  $d'$  de la courbe;
- les fonctions  $N_{i,d'}(t)$  sont des polynômes par morceaux définis sur l'intervalle  $[t_0, t_n]$  (figure 3).

Étant donné que le vecteur noeud ne fait pas partie des variables de conception lors de l'optimisation aérodynamique, sa spécification initiale est cruciale puisqu'elle détermine la concentration de l'influence des points de contrôle sur la courbe représentant le profil. La figure 3 présente les fonctions de base cubiques associées à un vecteur noeud uniforme et sept points de contrôle. Il est néanmoins possible et souhaitable de définir un vecteur noeud non-uniforme, d'où la terminologie **NonUniform** B-Spline, afin de concentrer l'influence des points de contrôle aux endroits critiques, i.e. bord d'attaque et bord de fuite. La figure 4 présente les fonctions cubiques associées à sept points de contrôle et à un vecteur noeud non-uniforme,  $T = \{0, 0, 0, 0, .1, .2, .3, 1, 1, 1, 1\}$ , concentrant l'influence des

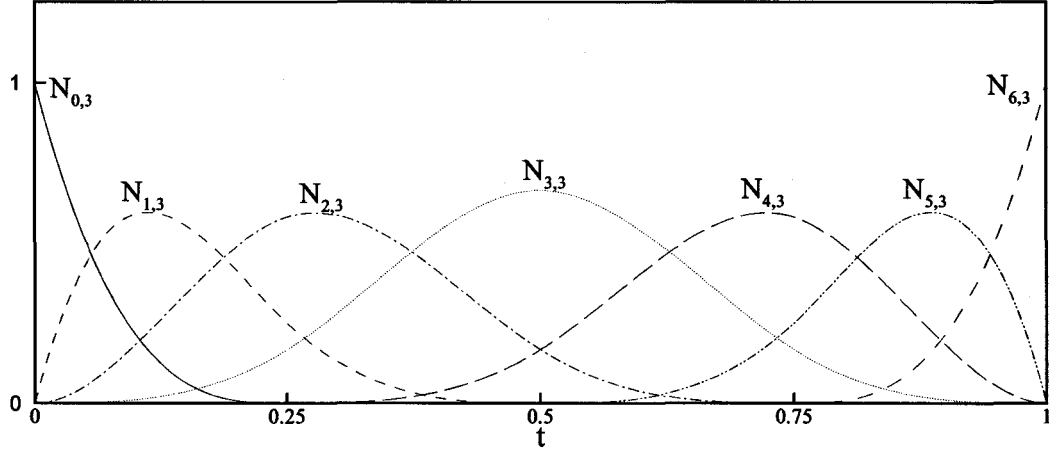


Figure 3 Fonctions de base cubiques ( $d' = 3$ ) définies sur  $T = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$  pour sept points de contrôle

points de contrôle au début de la courbe. Le choix du vecteur noeud est une problématique rarement abordée lors de travaux antérieurs et sera élaborée à la section suivante. A partir de ces fonctions de base les B-splines Non-Uniformes (NUBS) sont définies par :

$$P_p(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,d'}(t) P_i$$

où  $\{P_i\}$  sont les coordonnées des points de contrôle et  $P_p(t)$  les coordonnées d'un point sur la courbe pour une valeur du paramètre  $t$ . En général, la paramétrisation de la courbe est effectuée pour,  $0 \leq t \leq 1$ . Le vecteur noeud non-uniforme associé à une courbe de degré  $d'$  et possédant  $n + 1$  points de contrôle, est alors donné par :

$$T = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{d'+1}, t_{d'+1}, \dots, t_n, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{d'+1} \quad \begin{cases} t_i \leq t_{i+1} \\ d' \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.3)$$

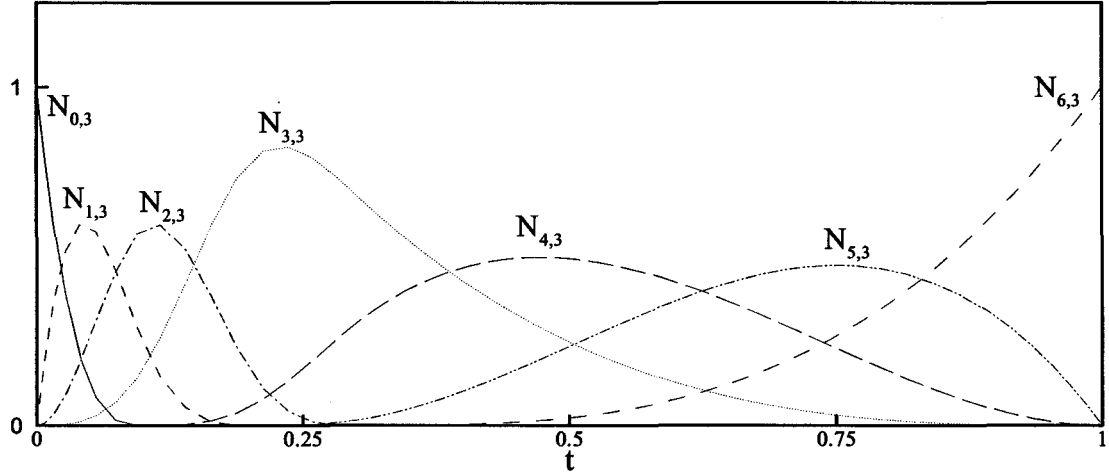


Figure 4 Fonctions de base cubiques ( $d' = 3$ ) définies sur  $T = \{0, 0, 0, 0, .1, .2, .3, 1, 1, 1, 1\}$  pour sept points de contrôle

Les NURBS sont une extension des NUBS et introduisent un poids  $w_i$  (réel positif) associé à chaque point de contrôle :

$$P_p(t) = \sum_{i=0}^n R_{i,d'}(t) P_i \quad (3.4)$$

$$\text{avec } R_{i,d'}(t) = \frac{N_{i,d'}(t) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,d'}(t) w_j} \quad (3.5)$$

Une NUBS peut ainsi être considérée comme une NURBS aux poids uniformes ( $w_i = 1$ ). Une présentation mathématique et algorithmique plus détaillée des NUBS et des NURBS est disponible à la référence [72]. Il est à remarquer que ces courbes ne passent pas par les points de contrôle sauf aux extremums, soit les premiers et derniers points de contrôle. L'utilisation de poids,  $w_i$ , est l'élément qui distingue les NURBS des NUBS. Cet aspect comporte des avantages et des faiblesses. La spécification de poids permet l'attraction locale de la courbe aux points de contrôle ce qui confère aux NURBS une liberté géométrique supérieure aux NUBS pour un nombre donné de points de contrôle. Afin d'obtenir

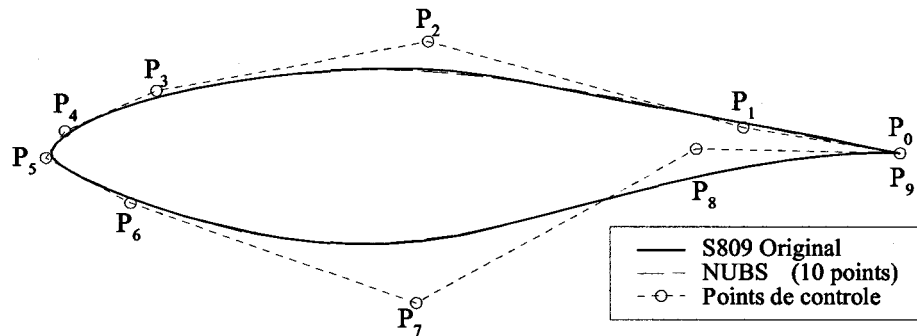


Figure 5 Approximation du profil S809 avec dix points de contrôle

une flexibilité comparable à celle des NURBS et d'inclure l'information additionnelle contenue dans ces poids, le nombre de points de contrôle d'une NUBS doit être supérieur. Toutefois, l'accroissement du nombre de points de contrôle sur la courbe augmente également le risque de bruit sur le profil (i.e. petites irrégularités parasites sur la courbe). Cependant, l'emploi de NURBS pour la représentation de profils présente le risque que différentes positions de points de contrôle correspondent à des géométries de profils proches. Cette caractéristique rend l'emploi des NURBS délicat puisqu'elle viole la relation souhaitable de bijectivité établie précédemment au chapitre 2 entre la position des points de contrôle et le profil discret associé. Cette faiblesse des représentations par NURBS est confirmée par la sensibilité importante de ces dernières par rapport à la position initiale des points de contrôle lors de l'optimisation de  $F_g(P_i)$  (équation (3.8)) décrite à la section suivante. Dans le contexte d'une optimisation basée sur le gradient telle que celle projetée dans ce travail, ce défaut est particulièrement critique puisque la paramétrisation du profil initial risque de fortement influencer la géométrie de l'espace de recherche et ultimement la solution finale de l'OA. Ainsi, de par les expériences effectuées, on préférera les NUBS aux NURBS pour la modélisation de profil.



### 3.1.2 Modélisation de profil aérodynamique

Bien qu'il existe une grande diversité dans la géométrie des profils aérodynamiques, pour la plupart, ces derniers peuvent être associés à des courbes fermées. La représentation géométrique retenue consiste en une courbe NUBS dont le premier et le dernier point de contrôle sont confondus au point du bord de fuite du profil tel que présenté à titre d'exemple à la figure 5 pour le profil S809 modélisé à l'aide de dix points de contrôle. La problématique centrale à la modélisation de profil aérodynamique réside dans la paramétrisation de profils existants. Ainsi, il faut déterminer les positions des points de contrôle de la courbe qui permettent d'approximer le plus fidèlement un profil existant. Ce problème consiste en une optimisation où la fonction objectif à minimiser représente une mesure de l'erreur géométrique entre le profil original cible et la courbe NUBS approximée. Les variables de conception de l'optimisation sont la position des points de contrôle de la courbe approximée. La figure 6 illustre le calcul de l'erreur géométrique pour un profil représenté par  $k$  points discrets. La distance  $b_i$  ( $b_i \geq 0$ ) entre les points discrets du profil cible et leurs approximations permet le calcul de l'erreur géométrique moyenne par point sur le profil :

$$\bar{\epsilon}_g = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k b_i \quad (3.6)$$

ainsi que l'erreur maximale :

$$\epsilon_{g,max} = \max_{1 \leq i \leq k} b_i \quad (3.7)$$

La fonction objectif à minimiser est obtenue en combinant ces deux erreurs [57] :

$$F_g(P_i) = \bar{\epsilon}_g + 2\epsilon_{g,max} \quad (3.8)$$

Des résultats prometteurs ont été obtenus pour ce problème d'optimisation sur la base des algorithmes génétiques [18, 33]. Toutefois, tel qu'énoncé précédemment, même pour une fonction objectif aussi peu coûteuse à évaluer, les algorithmes génétiques nécessitent un

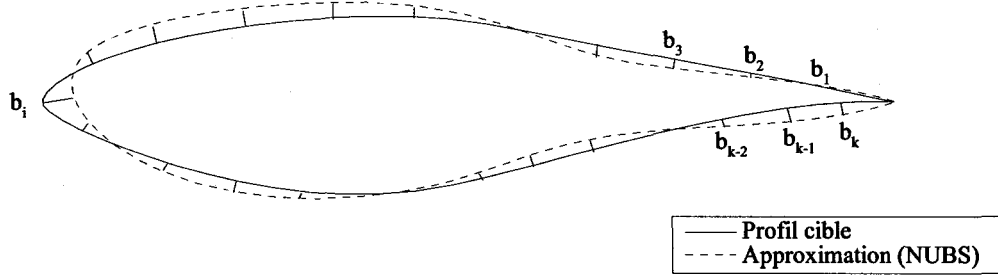


Figure 6 Évaluation de l'erreur géométrique entre le profil original cible et la courbe approximée

effort de calcul important. L'approche alternative consiste à trouver une paramétrisation initiale du profil, puis d'optimiser la position des points de contrôle à l'aide d'un algorithme de recherche basé sur le gradient. Le choix de la paramétrisation initiale est cruciale puisqu'elle prédétermine le résultat final de l'optimisation. Certains chercheurs [57] déterminent la paramétrisation initiale à partir de la courbure du profil original (i.e. dérivée seconde), alors que la spécification du vecteur noeud est faite de manière ad-hoc. L'approche retenue pour la présente recherche exploite le fait que lorsque les poids  $w_i$  sont fixés à 1, soit pour une NUBS (NonUniform B-Spline), l'équation de la courbe devient linéaire. Ainsi, pour chaque  $k$  points discrets du profil original  $P_p^o(t_j^o)$ , on peut écrire l'équation linéaire suivante :

$$\sum_{i=0}^n N_{i,x}(t_j^o) P_i(t_j^o) = P_p^o(t_j^o) \quad 1 \leq j \leq k \quad (3.9)$$

avec  $P_i(t_j^o)$  les points de contrôle de la B-Spline et  $N_{i,x}(t_j^o)$  les fonctions de base (équations (3.1)–(3.2)) associées. L'exposant  $o$  fait référence au profil original à paramétrer. Ce système d'équations peut prendre la forme matricielle suivante :

$$[\mathcal{N}][P] = [P_p^o] \quad (3.10)$$

La matrice  $[\mathcal{N}]$  de dimension  $[k \times (n+1)]$  correspond à un problème linéaire surdéterminé, i.e. plus d'équations que d'inconnues ( $k > (n+1)$ ), dont la solution algébrique est bien connue :

$$[P] = ([\mathcal{N}]^T [\mathcal{N}])^{-1} ([\mathcal{N}]^T [P_p^o]) \quad (3.11)$$

Ainsi, pour un vecteur noeud donné, la résolution du système 3.11 détermine la position des points de contrôle qui minimise l'erreur géométrique moyenne. Par l'utilisation de l'algorithme d'optimisation BFGS [9] basé sur le gradient, le vecteur noeud peut être optimisé par rapport à la fonction  $F_g$  (équation (3.8)). Le vecteur noeud de départ de l'optimisation est uniforme. Bien que cette approche pour la paramétrisation de profil ne garantisse pas la globalité de la solution obtenue, elle semble toutefois être peu influencée par le vecteur noeud de départ et a démontré de bons résultats tels que présentés à la section suivante.

### 3.1.3 Résultats

La présente section a pour objectif de démontrer la validité et l'efficacité de la représentation géométrique de profil par NUBS. Ainsi, la représentation de profil proposée devrait permettre d'approximer avec précision n'importe quel type de profil aérodynamique. La qualité et la précision des représentations géométriques de profil peuvent être évaluées selon deux types de critères : la fabrication ou l'analyse aérodynamique. Ainsi, la plus grande distance entre les points du profil original et ceux de l'approximation par NUBS, i.e.  $\epsilon_{g,max}$  (équation (3.7)), peut être comparée à la tolérance géométrique de fabrication d'une aile d'avion qui correspond à une valeur de  $2 \times 10^{-4}$  [57] (adimensionnée pour une corde de longueur unitaire). L'approche alternative afin d'apprécier la validité de la représentation géométrique consiste à comparer les solutions numériques de l'écoulement obtenues sur le profil original à celles provenant de l'approximation par NUBS. Dans un premier temps, appliquons ces critères d'évaluation à un profil spécifique. La représentation géométrique par NUBS décrite à la section précédente est utilisée afin d'approximer

mer le profil NACA 63013 [1] pour divers nombres de points de contrôle. Les erreurs

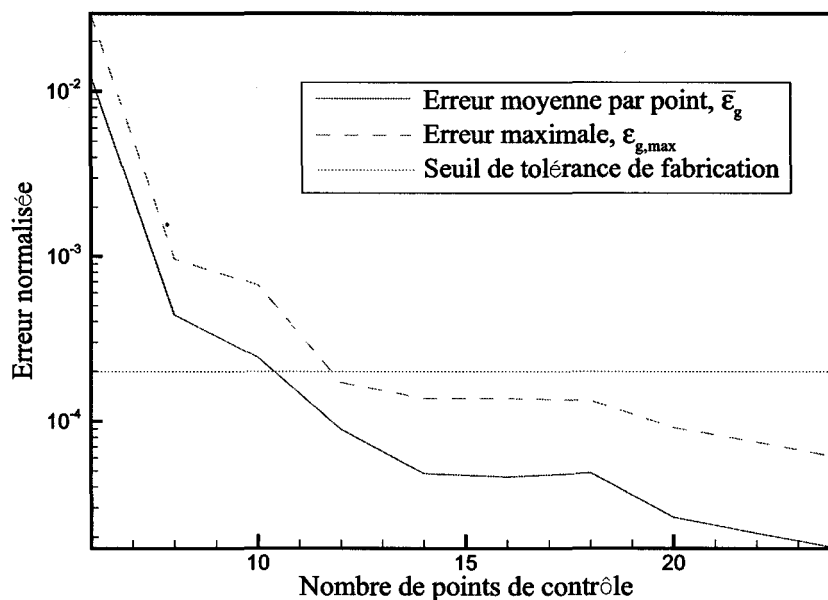


Figure 7 Précision des approximations par NUBS du profil NACA 63013 en fonction du nombre de points de contrôle

géométriques correspondant à ces approximations sont reportées sur le graphique de la figure 7 (adimensionnalisées pour une corde de longueur unitaire). Tel qu'attendu, la précision des représentations augmente avec le nombre de points de contrôle. Mais l'intérêt principal du graphique de la figure 7 est qu'il permet d'identifier le nombre de points de contrôle nécessaire afin d'atteindre un seuil d'erreur géométrique spécifié. Ainsi, afin d'obtenir une erreur géométrique maximale,  $\epsilon_{g,max}$ , inférieure à la tolérance de fabrication ( $2 \times 10^{-4}$ ), seuls 12 points de contrôle sont requis dans le cas du profil NACA 63013. Ces approximations de profil sont par la suite évaluées par le biais de solutions numériques de l'écoulement. La figure 8 présente les distributions des coefficients de pression autour des approximations par NUBS du profil NACA 63013 obtenus par le code de calcul de

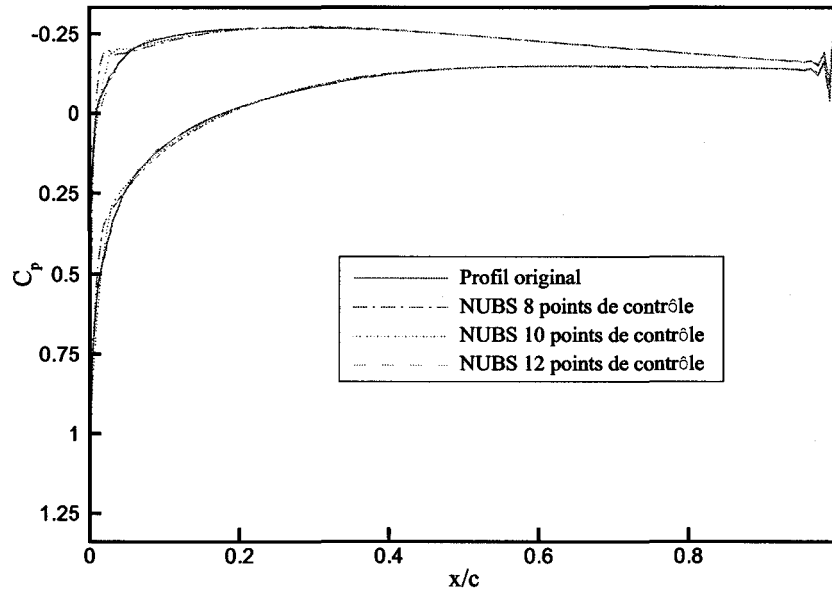


Figure 8 Distribution des coefficients de pression des approximations par NUBS du profil NACA 63013, angle d'attaque :  $\alpha = 5$  deg, nombre de Reynolds :  $Re=40$

l'écoulement présenté au chapitre 4, sur un maillage en C possédant  $56 \times 251$  points, pour les conditions d'opération suivantes : angle d'attaque 5 degré et nombre de Reynolds de 40. Pour les approximations par NUBS à 8 et 10 points de contrôle, des différences sur les coefficients de pression sont présentes autour du bord d'attaque par rapport au profil original NACA 63013. Toutefois, au dessus de 12 points de contrôle, aucune différence n'est plus perceptible à l'échelle du graphique de la figure 8. Pour 12 points de contrôle, l'erreur géométrique maximale,  $\epsilon_{g,max}$ , commise pour la représentation du profil NACA 63013 a une valeur de  $1.85 \times 10^{-4}$  qui est inférieure au seuil de tolérance de fabrication de  $2 \times 10^{-4}$ . Les deux critères d'évaluation de la représentation géométrique de profil, de fabrication et d'analyse, peuvent être combinés en un seul. Pour être suffisamment précises et valides, les représentations géométriques par NURBS doivent posséder une erreur

géométrique maximale,  $\epsilon_{g,max}$ , inférieure ou égale à  $1.85 \times 10^{-4}$  (adimensionnée pour une corde de dimension unitaire). La figure 9 présente le profil original NACA 63013 et son

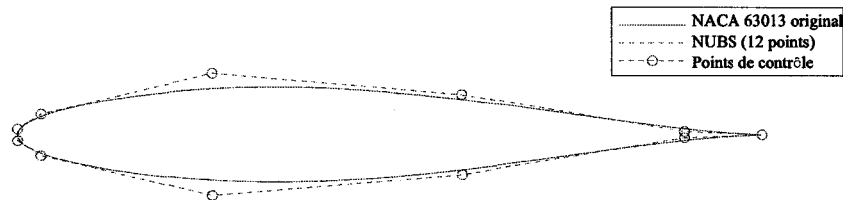


Figure 9 Profil aérodynamique NACA 63013 original et approximation par une NUBS à 12 points de contrôle

approximation par NUBS avec 12 points de contrôle. On constate encore qu'à l'échelle de la figure 9, aucune différence n'est perceptible entre le profil NACA 63013 original et l'approximation par NUBS à 12 points de contrôle. Afin de généraliser les résultats précédents et d'élargir la portée de la présente étude, 16 profils aérodynamiques liés au domaine éolien ont été modélisés. La figure 10 présente les 16 profils suivants :

- FX77W258 défini 120 par points discrets;
- FX77W343 défini par 120 points discrets;
- FX63137 défini par 120 points discrets;
- FX77W153 défini par 120 points discrets;
- NACA 63013 défini par 200 points discrets;
- NACA 63315 défini par 200 points discrets;
- NACA 63436 défini par 200 points discrets;
- NACA 63014 défini par 200 points discrets;
- NACA 63316 défini par 200 points discrets;
- NACA 64415 défini par 200 points discrets;

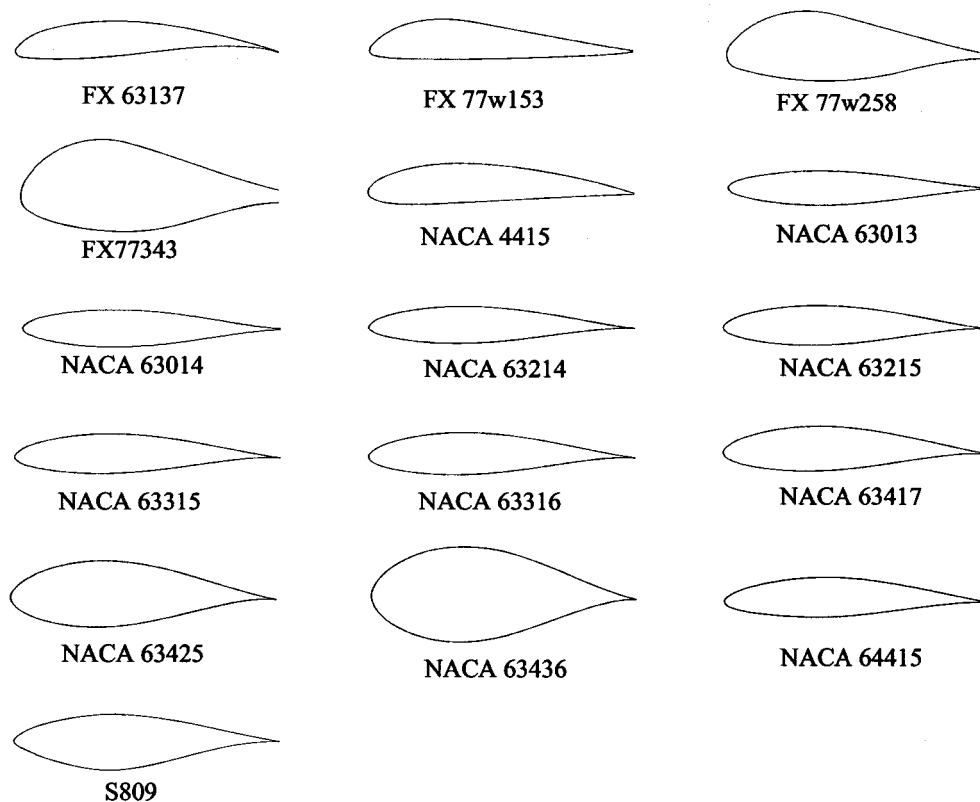


Figure 10 Profils aérodynamiques utilisés pour l'étude de la précision d'une représentation géométrique par NUBS

- NACA 63214 défini par 200 points discrets;
- NACA 4415 défini par 200 points discrets;
- NACA 63417 défini par 200 points discrets;
- NACA 63215 défini par 200 points discrets;
- NACA 63425 défini par 200 points discrets;
- S809 défini par 70 points discrets.

Ces profils varient de manière sensible dans leurs formes, leurs épaisseurs et leurs cambrures et représentent un échantillon raisonnablement vaste des profils aérodynamiques

éoliens. Sur la base du critère de précision de  $\epsilon_{g,max} \leq 1.85 \times 10^{-4}$  préalablement établi, le tableau II présente le nombre de points de contrôle nécessaire afin approximer adéquatement les profils de la figure 10 à l'aide de NUBS. De manière générale, beaucoup des

Tableau II

Nombre de points de contrôle d'une représentation de profil aérodynamique par NUBS, nécessaires à l'obtention d'une précision inférieure ou égale à  $1.85 \times 10^{-4}$

Profil aérodynamique	Nombre de points de contrôle	Erreur $\epsilon_{g,max}$
FX77W258	22	1.79E-4
FX77W343	21	1.85E-4
FX63137	20	1.29E-4
FX77W153	16	1.77E-4
NACA 63013	12	1.85E-4
NACA 63315	13	1.84E-4
NACA 63436	21	1.48E-4
NACA 63014	13	1.77E-4
NACA 63316	13	1.84E-4
NACA 64415	13	1.84E-4
NACA 63214	13	1.5E-4
NACA 4415	12	1.25E-4
NACA 63417	15	1.79E-4
NACA 63215	13	1.61E-4
NACA 63425	21	1.48E-4
S809	20	1.03E-4

profils NACA peuvent être modélisés adéquatement avec 13 points de contrôle. Mais sur la base de la banque de profils étudiés, il apparait que tous les profils peuvent être représentés correctement par une NUBS avec 22 points de contrôle ou moins. Ce résultat se compare avantageusement à une représentation discrète par points nécessitant près de 200 points. Les 22 points de contrôle correspondent à 40 variables de conception, ce qui est raisonnable dans le cadre d'une optimisation basée sur le gradient telle que celle envisagée dans ce travail. Ce nombre de variables est néanmoins supérieur à celui obtenu avec une repré-



sensation par NURBS dans les travaux de Lépine et al. [57]. Mais tel que précédemment énoncé, les représentations par NUBS semblent produire des problèmes d'optimisation mieux conditionnés par rapport aux NURBS (moins de minima locaux). Une comparaison systématique et complète de ces deux types de modélisation est toutefois nécessaire afin d'énoncer un avis définitif quant à la supériorité d'une approche sur l'autre.

### 3.2 Génération de maillage

Dans un souci de portabilité et d'homogénéité de la procédure globale d'optimisation, un module de génération de maillage autour de profils aérodynamiques a été développé. La présentation de cette procédure de génération de maillage ne se veut pas exhaustive puisqu'elle est basée sur des méthodes bien connues et documentées. Ainsi, seules les grandes lignes de la méthode sont présentées alors que les détails omis peuvent être aisément trouvés aux références citées. Afin de simplifier la mise en oeuvre des procédures de calcul de l'écoulement et des sensibilités, un maillage de type structuré est utilisé dans ce travail. Ainsi, un maillage en C a été préféré à un maillage en O, de par la meilleure conformité de sa topologie autour du bord de fuite et dans le sillage du profil. La figure 11 présente des vues des frontières d'un maillage en C dans : (a) l'espace d'indexation repéré par le couple  $(I, J)$  et (b) l'espace géométrique défini par le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . La ligne plus épaisse joignant les points C et D correspond au contour du profil et les lignes entre les points C-B et D-E, confondues dans l'espace géométrique, représentent la ligne de coupe du maillage. Sur cette ligne de coupe, seuls les points situés sur le segment C-B sont utilisés lors des calculs numériques. Ces points sont traités comme des points internes du maillage et non pas comme des points de frontière. Par conséquent, une attention particulière doit être portée à la procédure d'assemblage des équations discrétisées de mécanique des fluides et de sensibilité afin d'assurer une connectivité adéquate entre les noeuds situés entre C-B et les noeuds voisins de D-E positionnés autour de la ligne de coupe et du bord de fuite. La procédure de création du maillage est constituée des trois opérations suivantes :

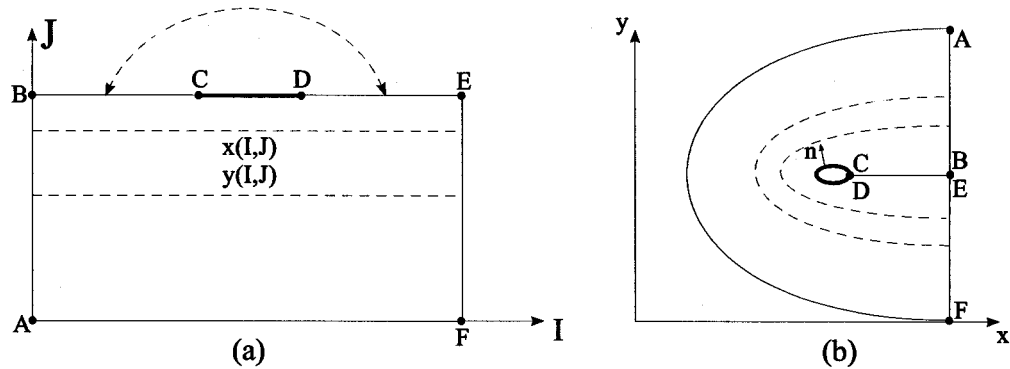


Figure 11 Frontières d'un maillage en C :(a) espace d'indexation repéré par le couple  $(I, J)$ , (b) espace géométrique défini par le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$

1. identification des frontières du maillage et de la ligne de coupe par un calcul non-visqueux [60];
2. génération du maillage par interpolation transfinie [53];
3. lissage du maillage par solution partielle d'un système elliptique [89].

La première étape consiste à créer les points situés sur les frontières du maillage (voir figure 11 (b)). Ainsi, à partir des points de contrôle de la NUBS, les points du maillage décrivant le contour du profil, courbes fermées C-D figure 11 (b), sont obtenus par la procédure décrite à la section précédente. La distribution des points autour du profil n'est pas uniforme et ces derniers sont plus concentrés au bord d'attaque et au bord de fuite pour permettre de représenter correctement la physique du problème. La ligne de coupe du profil (ligne C-B/D-E figure 11 (b)) est obtenue par la solution non-visqueuse de l'écoulement autour du profil. Ainsi, la ligne de coupe est associée à la ligne de courant  $\Psi = 0$  issue du bord de fuite du profil (voir figure 12) calculée par une méthode de panneaux basée sur une formulation ligne de courant [60]. La ligne de coupe obtenue par cette procédure se conforme adéquatement à la physique de l'écoulement. La distribution des points sur la ligne de coupe suit une croissance géométrique à partir du bord de fuite. La frontière externe correspondant à la ligne A-F de la figure 11 est obtenue par la translation de cha-

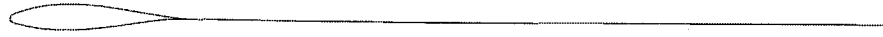


Figure 12 Ligne de coupe du maillage correspondant à la ligne de courant  $\psi = 0$ , issue de la solution non-visqueuse de l'écoulement autour du profil

cun des points situés sur les segments B-C-D-E dans la direction de la normale sortante,  $n$  (voir figure 11(b)), locale au point translaté. Deux frontières intermédiaires sont créées (lignes pointillées figure 11(b)) pour permettre une meilleure gestion de la distribution radiale des points dans le maillage afin de concentrer les noeuds dans la zone à proximité du profil. La première frontière intermédiaire est située à une distance normale de translation équivalente à trois fois l'épaisseur théorique de couche limite [83] sur plaque plane pour le nombre de Reynolds correspondant aux conditions de simulation envisagées. Puis la seconde frontière intermédiaire est positionnée à une distance de 3 cordes du profil et finalement la frontière A-F est placée à une distance de 30 cordes du profil. Un traitement spécial est appliqué afin d'éviter que deux lignes radiales de maillage ne se coupent. Ainsi, lorsqu'une telle situation survient dans les zones concaves du profil, les points des frontières intermédiaires ne sont pas issues des normales mais sont situés sur une droite formée par les translations de deux points du profil dont les normales forment un angle obtus. La distance de 30 cordes a été déterminée par une étude d'indépendance de la solution par rapport à la dimension du domaine de calcul. Ainsi, il a été démontré que pour un domaine de calcul dont les frontières sont situées à une distance supérieure à 30 cordes du profil, l'erreur relative commise sur le coefficient de traînée,  $C_D$ , est inférieure ou égale à 0.1%. Un traitement géométrique spécial est appliqué afin d'éviter que des lignes de maillage ne s'entrecroisent loin du profil. Finalement les points des frontières A-B et E-F (figure 11) sont positionnés sur les segments de droite reliant ces mêmes points. Après l'établissement des frontières, les points de maillage internes sont créés par interpolation transfinie [53].

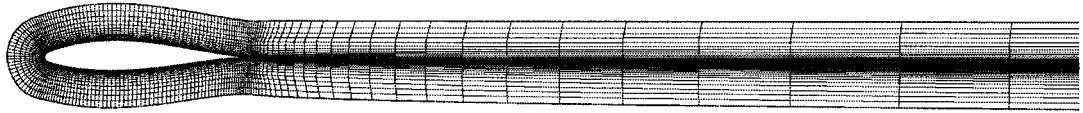


Figure 13 Fraction du maillage par interpolation transfinie pour la première zone adjacente du profil

Ainsi, trois interpolations transfinies sont effectuées pour les trois zones délimitées par les frontières B-C-D-E, les frontières intermédiaires et la frontière A-F (voir figure 11). Le maillage obtenu pour la zone adjacente au profil est présenté à la figure 13. Les premiers points de calcul dans la direction radiale sont situés à une distance normalisée de  $10^{-4}$  de la paroi du profil pour une corde de 1. Les maillages obtenus par interpolation transfinie ont le désavantage de posséder de faibles qualités de lissage. Cette faiblesse du maillage est réduite par l'application de quelques itérations de lissage par la solution d'un système elliptique [89]. La figure 14 présente le détail du maillage autour du profil avant (a) et après (b) l'application de l'algorithme de lissage elliptique. Suite à l'application du lissage, les lignes de maillage issues du bord d'attaque et du bord de fuite sont réparties de manière plus équilibrée dans le domaine de calcul (voir figure 14(b)). La procédure de lissage n'a pas été appliquée à la zone adjacente au profil (voir figure 13) afin de conserver des mailles parfaitement orthogonales dans la couche limite, dans l'optique de l'application future d'un modèle de turbulence. Finalement, la figure 15 donne une vue finale complète d'un maillage en C réalisé par la technique proposée.

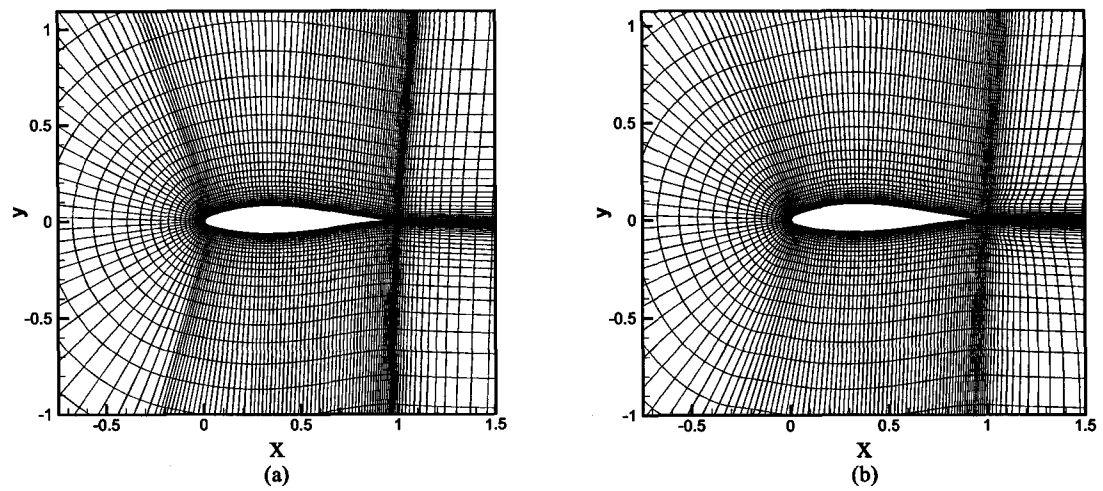


Figure 14 Détail du maillage autour du profil : (a) maillage par interpolation transfinie, (b) maillage (a) après l'application d'une procédure de lissage elliptique

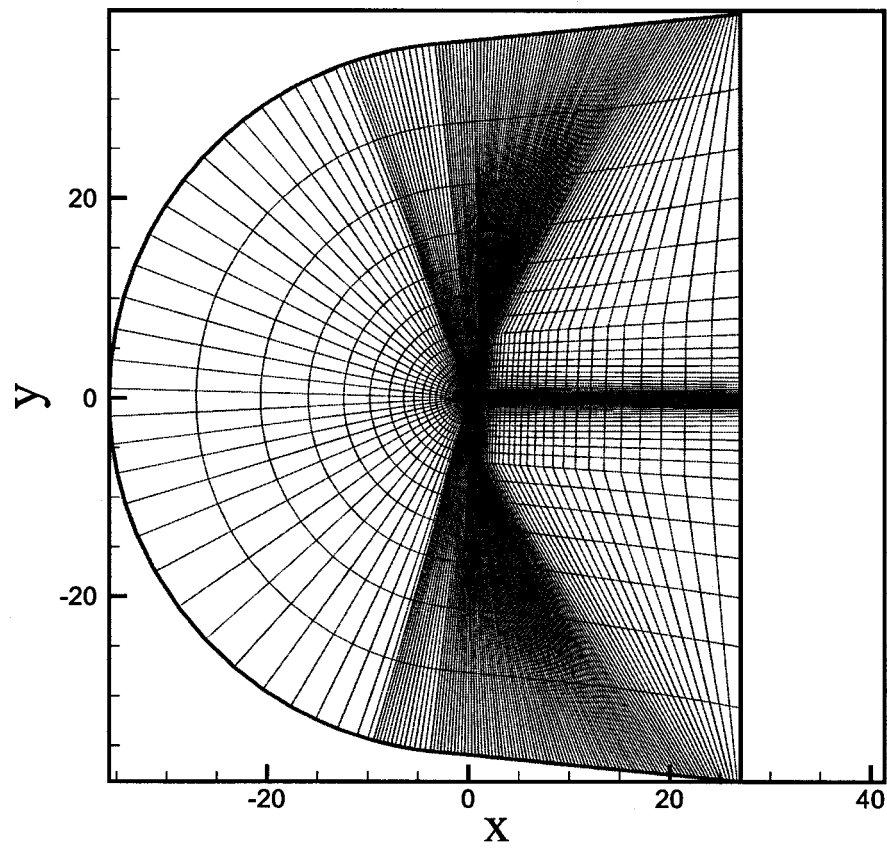


Figure 15 Vue finale complète d'un maillage en C réalisé par la technique proposée

## CHAPITRE 4

### SOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT

Le présent chapitre décrit la méthode de résolution numérique de l'écoulement autour de profils aérodynamiques. Les équations stationnaires de Navier-Stokes qui régissent la physique de l'écoulement sont présentées dans une première section. Puis, sur la base de l'algorithme de solution séquentielle SIMPLER, la méthode de CVFEM (Control-Volume Finite Element Method) couplée proposée est développée en détail. Une emphase spécifique est apportée à la description de la linéarisation des termes convectifs, présentant successivement les approches de Picard et de Newton. Une attention particulière est également accordée à la dérivation d'une équation de pression permettant l'emploi d'une formulation CVFEM à collocation d'ordre égal qui ne souffre pas de problèmes de champs de pression en damier lors de la simulation d'écoulement incompressible. La dernière section du présent chapitre établit le gain de performance de l'algorithme couplé de CVFEM par rapport à son homologue séquentiel à travers l'analyse des cas tests classiques de la cavité entraînée et de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

#### 4.1 Modèle mathématique

Dans le cadre d'une résolution par la méthode des volumes finis, la base la plus appropriée au processus de discrétisation est la forme intégrale des équations de conservation. Dans leurs formes intégrales conservatives, les équations stationnaires/laminaires de Navier-Stokes appliquées à un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  délimité par une surface  $\mathcal{A}$  peuvent s'écrire :  
Équation de continuité

$$\int_{\mathcal{A}} \rho u_j n_j dA = 0 \quad (4.1)$$

Tableau III  
Formes spécifiques de l'équation générale de transport

	$\Gamma_\phi$	$\phi$	$S_\phi$
Quantité de mouvement-x	$\mu$	$u$	$-(\partial p / \partial x)$
Quantité de mouvement-y	$\mu$	$v$	$-(\partial p / \partial y)$
Continuité	0	1	0

Équations de quantité de mouvement

$$\int_A (\rho u_j n_j) u_i dA = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_A \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j dA \quad (4.2)$$

où  $u_i$  est une composante cartésienne du vecteur vitesse  $\vec{V}$ ,  $\rho$  et  $\mu$  représentant respectivement la densité et la viscosité dynamique du fluide et où  $p$  est la pression.  $n_j$  est une composante du vecteur unitaire sortant normale à la surface élémentaire  $dA$ . Une description mathématique générale d'un phénomène de transport impliquant la variable scalaire  $\phi$  est donnée par :

$$\int_A (\rho u_j n_j) \phi dA = \int_A \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dA + \int_V S_\phi dV \quad (4.3)$$

Les équations de continuité et de quantité de mouvement, équations (4.1) et (4.2), peuvent être déduites de cette équation générale de transport, équation (4.3), en définissant la variable dépendante,  $\phi$ , le coefficient de diffusion,  $\Gamma_\phi$ , et le terme de source,  $S_\phi$ , selon le tableau III.

## 4.2 Méthode numérique

La méthode numérique proposée dans ce travail est une méthode CVFEM (Control-Volume Finite Element Method) basée sur une formulation bi-dimensionnelle aux variables pri-



mitives à collocation d'ordre égale qui partage plusieurs similarités avec les travaux de Baliga, Saabas et Masson [5, 59], Prakash et Patankar [77] et Schneider et Raw [84]. Les deux principaux aspects qui dissocient cette méthode des formulations antérieures résident dans le traitement implicite du couplage vitesse-pression et l'établissement d'une linéarisation de type Newton des termes de convection [2]. Par conséquent, dans un souci de clarté, une description concise des éléments de base constitutifs communs à toutes formulations d'une méthode CVFEM est présentée dans cette section en premier lieu. Puis, en s'appuyant sur ce cadre, deux CVFEM sont successivement bâties sur l'algorithme bien connu de SIMPLER puis sur l'algorithme couplé proposé en identifiant clairement les aspects distinguant les deux approches. La présente section se termine par la mise en oeuvre d'une linéarisation de type Newton à travers l'algorithme couplé.

#### 4.2.1 Éléments de base

##### 4.2.1.1 Discrétisation du domaine de calcul

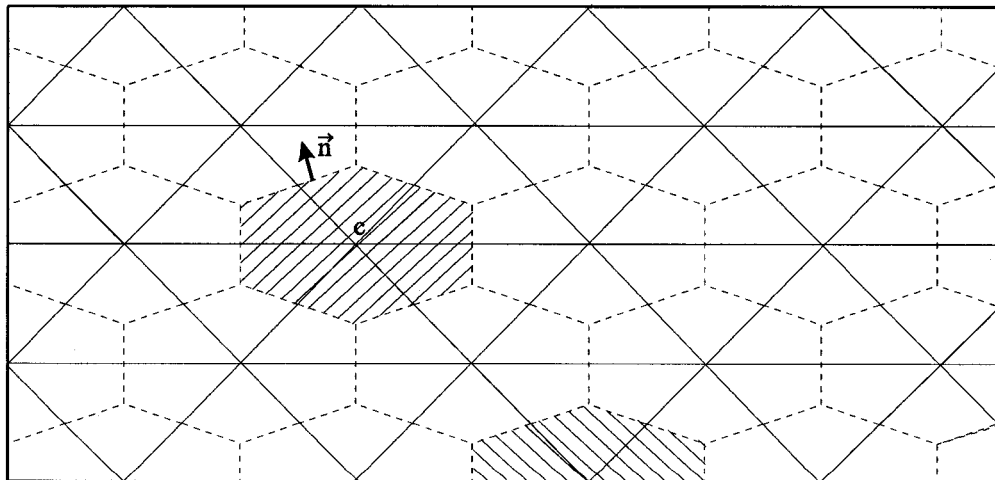


Figure 16 Exemple de domaine de calcul discrétisé en éléments triangulaires et en volumes de contrôle polygonaux

La procédure de discrétisation spatiale débute par la division du domaine de calcul en éléments triangulaires aux sommets desquels sont conservées les variables discrètes de l'écoulement. Des volumes de contrôle polygonaux sont par la suite formés en joignant le centre de chaque côté des triangles aux centroïdes tel que présenté à la figure 16; les lignes continues correspondent aux frontières des éléments et du domaine de calcul alors que les lignes faites de tirets délimitent les faces des volumes de contrôle. Les surfaces ombrées représentent les volumes de contrôle associées à un noeud interne et à un noeud placé sur la frontière.

#### 4.2.1.2 Équations intégrales de conservation

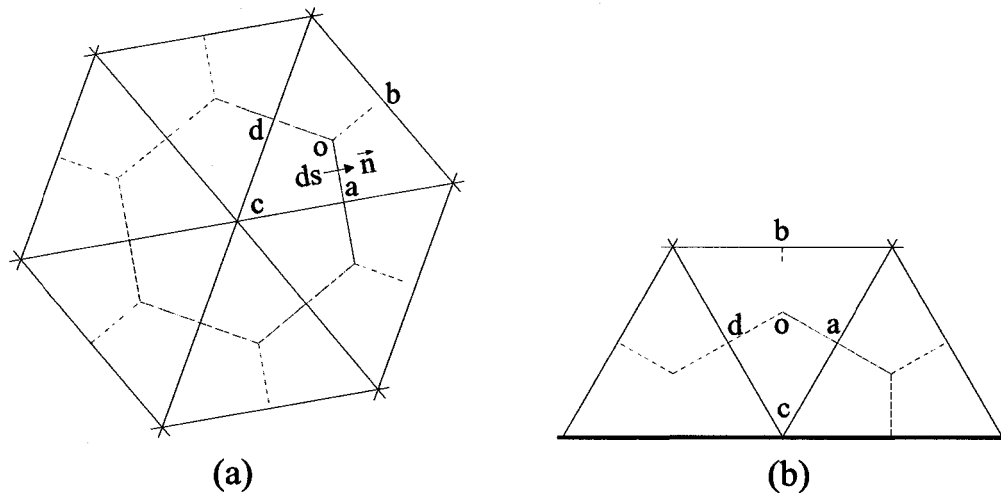


Figure 17 Volumes de contrôle types associés à (a) un noeud interne (b) un noeud de frontière

Considérons le noeud  $c$  comme un noeud quelconque appartenant au domaine de calcul; il peut correspondre à un noeud interne similaire à celui présenté à la figure 17a ou à un noeud placé sur la frontière tel qu'illustré à la figure 17b. Lorsqu'appliquée au volume de contrôle entourant le noeud  $c$  (figure 17), l'équation intégrale générale de conservation

(équation (4.3)) peut s'écrire :

$$\sum_{k=1}^M [\int_a^o \mathcal{J}_j n_j ds + \int_o^d \mathcal{J}_j n_j ds - \int_{caod} S_\phi d\mathcal{V}] + [\text{contribution des frontières si applicable}] = 0 \quad (4.4)$$

où  $M$  représente le nombre d'éléments triangulaires possédant le noeud  $c$  comme un de leurs sommets,  $n_j$  correspond au vecteur unitaire sortant du volume de controle  $\mathcal{V}$  et normal à l'élément différentiel de longueur  $ds$  et  $\mathcal{J}_j$  est le flux combiné de diffusion et de convection de  $\phi$  :

$$\mathcal{J}_j = \mathcal{J}_{Dj} + \mathcal{J}_{Cj} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{J}_{Dj} = -\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{J}_{Cj} = \rho u_j^m \phi \quad (4.7)$$

En référence à l'équation (4.7), l'exposant  $m$  attaché au vecteur vitesse distingue la vitesse massique de la vitesse convectée. La vitesse massique est interpolée par un traitement spécial tel que présenté à la section suivante. La forme de l'équation (4.4) met l'emphasis sur la possibilité d'assembler cette dernière par l'usage d'une procédure élément par élément.

#### 4.2.1.3 Fonctions d'interpolation

La dérivation d'équations algébriques approximées discrètes à partir des équations intégrales de conservation nécessite la spécification de fonctions d'interpolation associées aux éléments pour les variables dépendantes et les propriétés thermophysiques. Pour chaque élément triangulaire, l'ensemble des propriétés thermophysiques telles que la densité,  $\rho$ , et la viscosité dynamique,  $\mu$ , est évalué au centroïde  $o$  et ces valeurs prévalent sur l'ensemble de l'élément.

Afin d'obtenir une approximation algébrique discrète des flux de diffusion, équation (4.6), la variable scalaire transportée  $\phi$  est interpolée linéairement sur chaque élément.

Lors de la dérivation des approximations algébriques des flux de convection, équation (4.7), deux schémas d'interpolation furent investigués : le FLOW Oriented upwind scheme (FLO) et le MASS Weighted upwind scheme (MAW). Le schéma FLO est basé sur les travaux antérieurs de Baliga et Patankar [6, 7]. La fonction d'interpolation utilisée dans ce schéma fait l'usage approprié d'un nombre de Peclet local à l'élément et du vecteur vitesse moyen de l'élément. Pour des problèmes plans bi-dimensionnels, faisant intervenir des éléments triangulaires possédant des angles aigus et des nombres de Peclet relativement faibles, le schéma FLO s'est révélé très efficace [7, 81]. Le schéma MAW est une adaptation du "skewed positive influence coefficient upwinding scheme" de Schneider et Raw [84] provenant des travaux de Saabas et Baliga [81]. Le schéma MAW assure qu'au niveau de l'élément pour une variable dépendante associée à un noeud externe au volume de contrôle d'intérêt, la grandeur de la contribution aux flux de convection sortant est inférieure ou égale à celle correspondant au flux de convection entrant. Cette condition est suffisante pour garantir que les approximations algébriques des termes de convection s'additionnent positivement dans les coefficients des équations discrétisées. Plus encore, le schéma de MAW tient mieux compte de la direction de l'écoulement que le schéma "donnor-cell" de Prakash [76] ce qui le rend moins susceptible aux problèmes de fausse diffusion. Pour des problèmes faisant intervenir des éléments triangulaires aigus et de faibles nombres de Peclet, le schéma FLO est plus précis que celui de MAW [7, 81]. Toutefois, lorsque les problèmes impliquent des nombres de Peclet élevés, particulièrement en conjonction avec des éléments triangulaires obtus, le schéma de FLO produit des coefficients négatifs dans les équations discrétisées ce qui peut engendrer des difficultés numériques de convergence et des solutions dénuées de sens physique. Lorsque de telles difficultés sont rencontrées, l'utilisation du schéma de MAW est recommandée. Tel que démontré à la section des résultats du présent chapitre, les difficultés à converger du schéma FLO semblent moins sévères dans le contexte d'une formulation couplée. Pour sa part, la pression est interpolée linéairement à travers chaque élément. La formulation retenue pour ce travail fait usage d'un maillage à collocation ce qui implique que les vitesses et la

pression sont conservées aux mêmes noeuds du maillage. Ainsi, afin d'éviter l'apparition de champs de pression erronés, l'approche de Prakash et Patankar [77] a été adoptée. Une distinction est établie entre les vitesses massiques dénotées  $u^m$  dans l'équation (4.7) et correspondant à  $u_j$  dans les équations (4.1)-(4.3) et les vitesses convectées correspondant à  $u_i$  dans les équations (4.2) et (4.3). Les flux massiques,  $(\rho u_j)$ , dans les équations de continuité et de quantité de mouvement, sont interpolés en utilisant une forme particulière des équations discrétisées de quantité de mouvement suivant une approche proposée par Saabas et Baliga [81]. La définition des vitesses massiques  $(u_i^m)_c$  est très similaire aux expressions des vitesses discrétisées en ré-écrivant les équations discrétisées de quantité de mouvement, à la différence que le gradient de pression moyen,  $\overline{\partial p / \partial x_i}$ , est désormais évalué au niveau de l'élément plutôt qu'au niveau du volume de contrôle. En suivant le raisonnement de Prakash et Patankar [77], les vitesses massiques peuvent être considérées comme la somme d'une pseudo-vitesse,  $(\hat{u}_i)_c$ , et d'un terme de gradient de pression,  $-(d^{u_i})_c \left( \overline{\partial p / \partial x_i} \right)_{\text{ele}}$  :

$$(u_i^m)_c = (\hat{u}_i)_c - d_c^{u_i} \left( \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} \right)_{\text{ele}} \quad (4.8)$$

avec

$$(\hat{u}_i)_c = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^{u_i} (u_i)_{nb} + b^{u_i}}{a_c^{u_i}} \quad (4.9)$$

$$d_c^{u_i} = \frac{\mathcal{V}_{CV}}{a_c^{u_i}} \quad (4.10)$$

L'indice  $nb$  fait référence aux noeuds voisins du point de maillage d'intérêt  $c$ . La substitution des pseudo-vitesses et des termes de gradient de pression dans l'équation de continuité donne naissance à une équation de Poisson pour la pression. Sur chaque élément, les flux massiques sont évalués en supposant une variation linéaire des pseudo-vitesses,  $(\hat{u}_i)_c$ , et des coefficients de pression,  $d_c^{u_i}$ , en conjonction avec le gradient de pression local de l'élément.

### 4.2.2 Formulation séquentielle

En faisant usage des fonctions d'interpolation décrites à la section précédente, les équations de Navier-Stokes, équations (4.1)-(4.2), peuvent être discrétisées pour un noeud quelconque  $c$  :

Équation de continuité

$$a_c^p p_c = \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} + b^p \quad (4.11)$$

où

$$b^p = \sum_{k=1}^M \left[ \int_a^o \rho \hat{u}_j n_j ds + \int_o^d \rho \hat{u}_j n_j ds \right] \quad (4.12)$$

Équations de quantité de mouvement

$$a_c^{u_i} (u_i)_c = \sum_{nb} a_{nb}^{u_i} (u_i)_{nb} + b^{u_i} + \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{CV} \mathcal{V}_{CV} \quad (4.13)$$

où

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{CV} \mathcal{V}_{CV} = \sum_{k=1}^M \int_{caod} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_k d\mathcal{V} \quad (4.14)$$

Écrit sous cette forme, ce système d'équations discrétisées non-linéaires peut être résolu de manière découplée en faisant usage de l'algorithme d'ajustement séquentiel des variables [81] qui est similaire à l'algorithme bien connu SIMPLER [71] mais omettant l'équation de correction de pression, tel que décrit par la séquence d'opérations suivantes :

1. initialiser le champ de vitesse;
2. calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement, équation (4.13), sans les contributions des termes de gradient de pression;
3. calculer  $\hat{u}_i$  et  $d^{u_i}$ ;
4. calculer les coefficients de l'équation de pression , équation (4.11).
5. résoudre l'équation de pression;

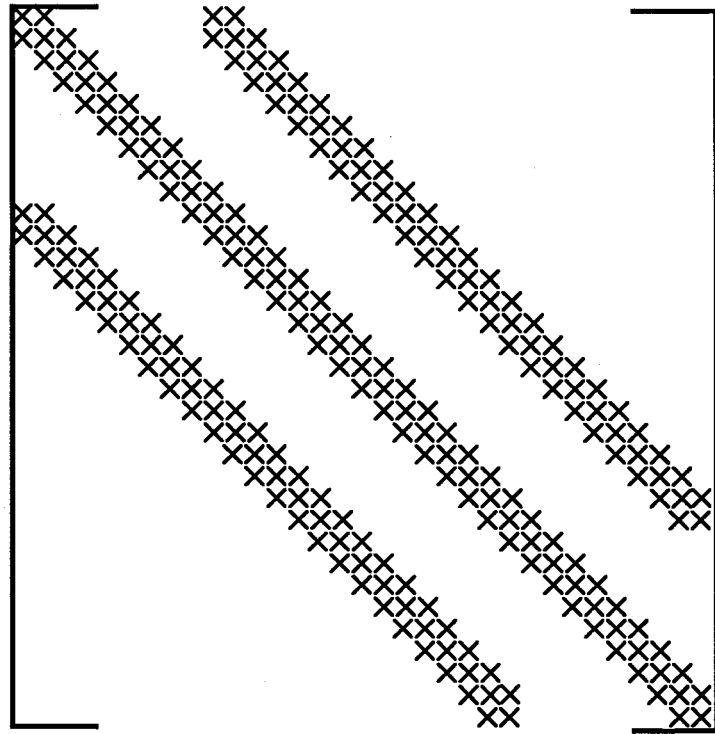


Figure 18 Structure matricielle pour la méthode séquentielle

6. compléter les équations de quantité de mouvement en y ajoutant les termes de gradient de pression, leur appliquer de la relaxation et résoudre;
7. retourner à l'étape 2 et répéter jusqu'à convergence.

Lors du présent travail, les étapes 2-7 de cette procédure furent répétées jusqu'à ce que la somme adimensionnée de la valeur absolue des résidus de chaque équation discrétisée soit inférieure ou égale à  $10^{-8}$ . Cet algorithme séquentiel est basé sur la technique de linéarisation par substitution successive, aussi connue sous l'appellation de linéarisation de Picard. Lorsqu'appliquée aux termes de convection des équations de quantité de mouvement, cette approche consiste à considérer fixes les valeurs des vitesses massiques provenant de l'itération précédente et de résoudre uniquement pour les variables correspondant à l'équation à résoudre. Pour chaque cycle de cet algorithme, les systèmes d'équa-

tions correspondant aux variables dépendantes  $p$ ,  $u$  et  $v$  sont solutionnés indépendamment en séquence. Avant d'être solutionnées, les équations discrétisées pour  $u$  et  $v$  sont sous-relaxées par la procédure de relaxation de Patankar [71]. Pour tous les calculs réalisés, la valeur des paramètres de relaxation a été fixée à 0.5 pour les équations de quantité de mouvement alors que les équations de pression ne subissent *pas* de relaxation.

De manière à faciliter la mise en oeuvre et l'évaluation de la méthode couplée de CVFEM proposée, des maillages structurés sont employés lors du présent travail. Ainsi, les noeuds du maillage suivent des lignes non-orthogonales ce qui permet leurs indexations à travers un tableau à deux composantes  $(I, J)$  et implique que chaque noeud possède au maximum huit voisins. Dans le contexte de maillage structuré, chaque système d'équations discrétisées possède une structure matricielle à 9 diagonales telle que présentée à la figure 18. Ces systèmes peuvent être réorganisés en sous-systèmes matriciels à 3 diagonales et solutionnés indépendamment en séquence pour  $u_i(u, v)$  et  $p$ , en utilisant une méthode de résolution itérative ligne par ligne de type Gauss-Seidel basée sur l'algorithme pour matrice tridiagonale de Thomas. Tel que présenté par la suite à la section 4.2.3, une procédure de solution similaire par un algorithme tridiagonal par bloc ne peut être utilisée pour résoudre le système matriciel correspondant à la formulation couplée proposée. La solution itérative des systèmes d'équations discrétisées couplées requiert de manière stricte que l'ensemble des variables dépendantes soit actualisé simultanément sur l'ensemble du domaine de calcul durant le processus de résolution. Cette condition implique l'usage d'une méthode de résolution de type non-stationnaire pour la méthode couplée. Ainsi, l'algorithme de solution GMRES(m) de Saad [82] pré-conditionné par une décomposition LU incomplète (ILUT) a été utilisée dans ce travail. Par conséquent, afin d'évaluer de manière isolée et adéquate le seul effet du couplage vitesse-pression sur l'efficacité générale de la méthode CVFEM, la même procédure de solution a été mise en oeuvre dans le cas de la formulation séquentielle.



### 4.2.3 Formulation couplée

Bien que cela ne soit pas explicitement énoncé, les équations discrétisées de l'approche séquentielle, équations (4.11)-(4.13), recèlent déjà tous les éléments nécessaires à leurs résolutions couplées. Dans les équations de quantité de mouvement, le gradient de pression moyen pour le volume de contrôle entourant le noeud  $c$  peut être exprimé en fonction des pressions des noeuds voisins du maillage :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{CV} V_{CV} = \sum_{nb} a_{nb}^{u_i, p} p_{nb} \quad (4.15)$$

Dans le même esprit, le terme  $b^p$  contenu dans l'équation de continuité peut être explicité en fonction des pseudo-vitesses des noeuds voisins du point  $c$  :

$$b^p = -a_c^{p, \hat{u}} \hat{u}_c + \sum_{nb} a_{nb}^{p, \hat{u}} \hat{u}_{nb} - a_c^{p, \hat{v}} \hat{v}_c + \sum_{nb} a_{nb}^{p, \hat{v}} \hat{v}_{nb} \quad (4.16)$$

Ayant reconnu la dépendance implicite des équations discrétisées de quantité de mouvement et de continuité par rapport aux variables dépendantes  $\hat{u}, \hat{v}$  et  $p$ , le système d'équations discrétisées peut prendre la forme suivante :

Équation de continuité

$$a_c^p p_c + a_c^{p, \hat{u}} \hat{u}_c + a_c^{p, \hat{v}} \hat{v}_c = \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} + \sum_{nb} a_{nb}^{p, \hat{u}} \hat{u}_{nb} + \sum_{nb} a_{nb}^{p, \hat{v}} \hat{v}_{nb} \quad (4.17)$$

Équations de quantité de mouvement

$$a_c^{u_i} (u_i)_c + a_c^{u_i, p} p_c = \sum_{nb} a_{nb}^{u_i} (u_i)_{nb} + \sum_{nb} a_{nb}^{u_i, p} p_{nb} \quad (4.18)$$

Finalement, l'expression des pseudo-vitesses  $\hat{u}_i$  vient compléter le système couplé :

$$a_c^{u_i} (\hat{u}_i)_c = \sum_{nb} a_{nb}^{u_i} (u_i)_{nb} \quad (4.19)$$

Sous forme matricielle plus compacte, le système couplé peut s'écrire :

$$F(X) = A_c \Phi_c + \sum_{nb} A_{nb} \Phi_{nb} - B = 0 \quad (4.20)$$

où  $\Phi_c = [u_c, v_c, \hat{u}_c, \hat{v}_c, p_c]^T$  et  $\Phi_{nb} = [u_{nb}, v_{nb}, \hat{u}_{nb}, \hat{v}_{nb}, p_{nb}]^T$ . Pour des écoulements bidimensionnels, la structure des matrices  $A_c$  et  $A_{nb}$  est donnée par :

$$A_c = \begin{pmatrix} a_c^u & 0 & 0 & 0 & a_c^{u,p} \\ 0 & a_c^v & 0 & 0 & a_c^{v,p} \\ 0 & 0 & a_c^u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_c^v & 0 \\ 0 & 0 & a_c^{p,\hat{u}} & a_c^{p,\hat{v}} & a_c^p \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$A_{nb} = \begin{pmatrix} -a_{nb}^u & 0 & 0 & 0 & -a_{nb}^{u,p} \\ 0 & -a_{nb}^v & 0 & 0 & -a_{nb}^{v,p} \\ -a_{nb}^u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{nb}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{nb}^{p,\hat{u}} & -a_{nb}^{p,\hat{v}} & -a_{nb}^p \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $B$  contient uniquement les contributions provenant des conditions aux frontières de type Dirichlet alors que toutes autres conditions aux frontières sont traitées implicitement. Pour des maillages bidimensionnels structurés, le système couplé d'équations linéaires adopte une forme matricielle à neuf diagonales par blocs  $5 \times 5$ . Dans la formulation proposée, les pseudo-vitesses sont traitées comme des inconnues primaires ce qui assure une structure à neuf diagonales. Les pseudo-vitesses auraient pu être exprimées directement en fonction des vitesses dans les équations discrétisées résultant en un système par blocs  $3 \times 3$  plus compact. Toutefois, de par la procédure d'interpolation des flux massiques utilisée, les équations de continuité auraient fait intervenir 24 noeuds voisins plutôt que huit dans la formulation actuelle. Ce résultat augmenterait grandement la complexité

de la procédure d'assemblage et la mise en oeuvre d'une linéarisation de type Newton, sans pour autant engendrer d'économies substantielles d'espace mémoire.

La séquence d'opérations suivante expose les grandes lignes de la procédure de résolution couplée des équations de Navier-Stokes :

1. initialiser les champs de vitesse et de pression;
2. calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement, équation (4.18), et de pseudo-vitesses, équation(4.19);
3. calculer  $d^{u_i}$ ;
4. calculer les coefficients de l'équation de pression , équation (4.17);
5. résoudre simultanément les équations de quantité de mouvement, de pression et de pseudo-vitesse;
6. retourner à l'étape 2 et répéter jusqu'à convergence.

De la même façon que pour l'algorithme séquentiel, les étapes 2-6 de la procédure de résolution couplée sont répétées jusqu'à ce que la somme adimensionnée de la valeur absolue des résidus des équations discrétisées de continuité et de quantité de mouvement soit inférieure ou égale à  $10^{-8}$ . Dans la présente formulation couplée, les équations discrétisées sont solutionnées simultanément et sur la totalité du domaine de calcul pour les composantes de vitesse,  $u_i$ , les composantes de pseudo-vitesse,  $\hat{u}_i$ , et la pression  $p$ . Par conséquent, la solution couplée des équations ne requiert aucune relaxation ou traitement spécial pour converger étant donné que le couplage des équations est effectué implicitement.

La structure matricielle à neuf diagonales par blocs  $5 \times 5$  du système d'équations linéaires couplées est très similaire à celle établie lors de l'approche séquentielle (voir figure 18); les blocs  $5 \times 5$  remplacent désormais les coefficients des équations uniques. Il serait par conséquent naturel de transformer ce système en des systèmes tridiagonaux par blocs et de les résoudre par un algorithme ligne par ligne de Gauss-Seidel. Toutefois, cette ap-

proche refuse systématiquement de converger indépendamment de l'ordre, de la direction et du nombre de balayages de la méthode de résolution de Gauss-Seidel. Lors de la solution séquentielle, le champ de pseudo-vitesse est maintenu constant durant la solution des équations discrétisées de continuité et de quantité de mouvement. En opposition, pour la résolution couplée, les pseudo-vitesses sont traitées comme des inconnues primaires et leurs valeurs sont modifiées durant le processus de solution du système linéaire couplé. Ainsi, l'actualisation des valeurs des pseudo-vitesses par un balayage successif ligne par ligne de type Gauss-Seidel entraîne des déséquilibres locaux de conservation de la masse et conduit à la divergence de l'algorithme. Pour résoudre ce problème, la méthode de solution du système linéaire couplé doit actualiser simultanément toutes les inconnues du problème sur l'ensemble du domaine de calcul. Dans ce contexte, le système linéaire couplé pourrait être solutionné en utilisant une méthode directe. Toutefois, les méthodes directes telles que la technique d'élimination de Gauss nécessitent des ressources informatiques importantes ce qui limite la taille et la complexité des problèmes pouvant être abordés. L'extension future de la présente recherche à des problèmes pratiques complexes faisant intervenir des maillages 2D et 3D de dimensions importantes impose l'usage d'une méthode de résolution itérative non-stationnaire pour système linéaire creux. Ces algorithmes prennent avantage de la structure creuse par bande des matrices telles que celles rencontrées lors de la résolution numérique de problèmes en mécanique des fluides. Dans ce travail, une version avec redémarrage de l'algorithme GMRES [82] de Saad pré-conditionnée par une décomposition LU incomplète (ILUT) a été utilisée. Une des limites bien connue de GMRES réside dans le fait que les charges de mémoire et de travail qui lui sont associées augmentent linéairement avec le nombre d'itérations internes de l'algorithme. GMRES devient rapidement inutilisable pour des maillages de grandes dimensions. GMRES(m) offre un remède à ce problème en redémarrant l'algorithme après  $m$  itérations. Les données accumulées sont alors effacées et les résultats intermédiaires servent de solution initiale aux  $m$  itérations subséquentes. Cette procédure est répétée jusqu'à convergence du système et augmente grandement l'efficacité de GMRES. Bien que des économies substantielles de temps de

calcul puissent être réalisées en ajustant les paramètres de la procédure de solution du système linéaire (tel que le nombre d'entrées non-nulles de la décomposition ILUT, la taille maximale de l'espace de Krylov avant redémarrage et le critère de convergence) cet aspect n'a pas été abordé durant ce travail. Pour l'ensemble des calculs présentés dans ce document, les valeurs de ces paramètres de contrôle ont été fixées aux valeurs de base recommandées [82] et ont été modifiées uniquement lorsque des difficultés de convergence furent rencontrées. La seule modification apportée à la méthode de solution du système linéaire afin d'en accroître les performances a été de geler le pré-conditionnement [52] pour quelques itérations après obtention d'une solution approximée mais réaliste de l'écoulement. Cette stratégie s'est révélée très efficace et sa mise en oeuvre est triviale.

#### 4.2.4 Linéarisation de Newton

Hormis le couplage implicite vitesse-pression, l'utilisation d'une formulation couplée permet également d'effectuer le traitement implicite des non-linéarités provenant des termes de convection des équations de quantité de mouvement. La méthode de Newton est une technique itérative efficace pour résoudre les systèmes d'équations non-linéaires ayant la forme suivante :

$$R(\phi) = [r_1(\phi), r_2(\phi), \dots, r_N(\phi)]^T = 0 \quad (4.22)$$

où  $\phi$  peut s'exprimer comme  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^T$ . L'application de la méthode de Newton requiert la solution du système linéaire suivant :

$$J_t \delta \phi_t = -R(\phi_t) \quad (4.23)$$

où les éléments du Jacobien  $J$  sont définis par  $j_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial \phi_j}$  et la nouvelle solution approximée est donnée par :

$$\phi_{t+1} = \phi_t + \delta \phi_t \quad (4.24)$$

La constante  $\beta (0 \leq \beta \leq 1)$  de l'équation précédente est utilisée pour amortir l'avancement de la méthode lorsque la solution approximée est loin de sa valeur convergée. Toutefois, dans ce travail, il n'a pas été nécessaire d'appliquer de la relaxation pour obtenir les résultats présentés dans la suite du document. La matrice Jacobienne  $J$  peut être obtenue soit numériquement par l'application d'approximation par différence finie [62] ou par différenciation analytique exacte. Bien que sa mise en oeuvre requière un effort plus important, la différenciation algébrique élimine les problèmes d'erreurs d'arrondis associées aux différences finies et ne nécessite qu'une fraction de l'effort de calcul. Les non-linéarités des équations de Navier-Stokes résident uniquement dans les termes de convection à travers le produit  $(u_j^m)(u_i)$ . Toutefois, dans les équations discrétisées, le fait de négliger la dépendance de  $u_i$  en  $u^m$  provenant du schéma d'interpolation de convection entraîne des erreurs significatives dans la matrice Jacobienne et met en péril la réussite globale de la méthode de Newton. Ainsi, la valeur interpolée de  $u_i$  doit être différenciée par rapport aux cinq inconnues primaires de manière à bénéficier de l'application de la linéarisation de Newton. Dans ce travail, les schémas de FLO et de MAW furent tous deux différenciés. Des non-linéarités associées à la définition des vitesses massiques (voir équation(4.19)) sont également présentes dans le système couplé d'équations (équation(4.20)). Toutefois, leurs contributions n'ont pas été incluses dans la matrice Jacobienne proposée. La matrice Jacobienne conserve une structure à neuf diagonales par blocs  $5 \times 5$  qui peut prendre la forme suivante :

$$J_t \delta \phi_t = (A_c + J_c) \delta \phi_c + (A_{nb} + J_{nb}) \delta \phi_{nb} \quad (4.25)$$

avec

$$J_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j_c^{\hat{u}} & j_c^{\hat{v}} & j_c^{u,p} \\ 0 & 0 & j_c^{\hat{u}} & j_c^{\hat{v}} & j_c^{v,p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$J_{nb} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j_{nb}^{\hat{u}} & -j_{nb}^{\hat{u}} & -j_{nb}^{u,p} \\ 0 & 0 & -j_{nb}^{\hat{v}} & -j_{nb}^{\hat{v}} & -j_{nb}^{v,p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Étant donné que la structure des systèmes d'équations provenant de la linéarisation de Newton, équation (4.23), est très similaire à celle associée à la linéarisation de Picard, équation (4.20), la même procédure de solution couplée est utilisée pour les deux types de linéarisation. Pour la méthode de Newton, le seul traitement spécial à appliquer consiste à fixer les valeurs de  $J_c$  et  $J_{nb}$  à zéro pendant les premières itérations afin d'initier l'algorithme, jusqu'à ce qu'une solution approximée mais réaliste soit établie.

### 4.3 Résultats

La présente section a pour objectif de présenter les résultats relatifs à la méthode numérique de solution de l'écoulement afin d'évaluer les performances des différents algorithmes couplés proposés. Ainsi, six algorithmes de CVFEM différents ont été comparés en terme d'efficacité (temps de calcul) pour des problèmes d'écoulements interne et externe. Deux des algorithmes sont de type séquentiel et diffèrent uniquement dans leurs techniques de résolution du système d'équations linéaires. Le premier utilise une procédure de solution ligne par ligne de Gauss-Seidel basé sur l'algorithme de Thomas alors que le second fait usage de l'algorithme GMRES(m) de Saad pré-conditionné par une décomposition ILUT. Les quatre autres algorithmes sont de type couplé et utilisent tous GMRES(m). De ces quatre, deux d'entre eux appliquent la linéarisation de Picard alors que les deux autres sont basés sur la linéarisation de Newton. Pour une linéarisation donnée (Picard ou Newton), il existe un algorithme avec gel du pré-conditionnement ILUT et un autre sans. Pour un schéma de convection donné (FLO ou MAW), les six algorithmes donnent exactement la même solution convergée puisqu'ils solutionnent tous les mêmes

équations discrétisées mais sous des formes différentes. La précision de la solution dépend uniquement du schéma de convection choisi (FLO ou MAW).

#### 4.3.1 Écoulement dans une cavité entraînée

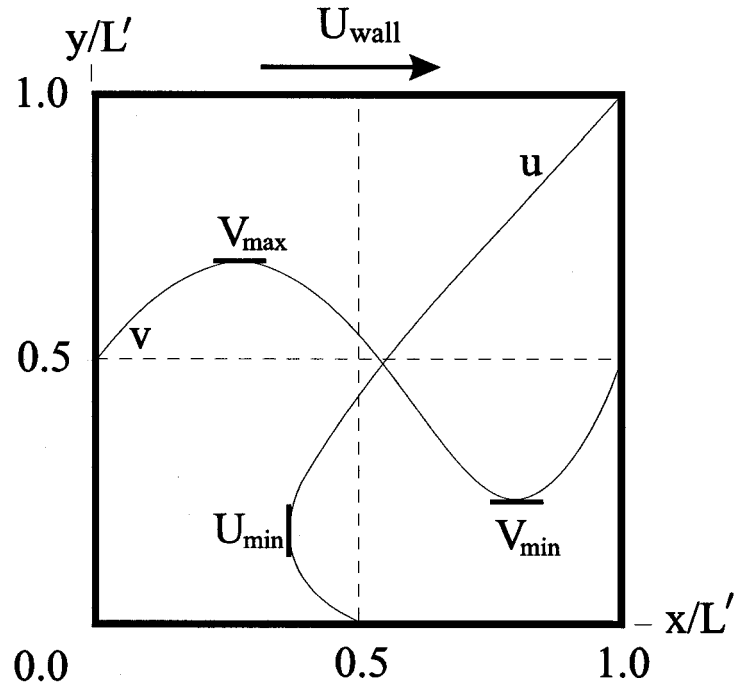


Figure 19 Définitions du problème de l'écoulement dans la cavité entraînée

Le problème classique de la cavité entraînée bidimensionnelle défini par  $0 \leq x \leq L'$ ,  $0 \leq y \leq L'$  avec  $u(x, L') = U_{wall}$ , est utilisé pour évaluer la performance des méthodes couplées (voir figure 19). Pour constater de la précision de la formulation proposée, des calculs ont été réalisés sur quatre maillages uniformes de finesse croissante pour les schémas de MAW et de FLO. Les tableaux IV et V comparent les valeurs des vitesses minimales et maximales aux axes centraux (voir figure 19) pour des nombres de Reynolds de 400 et de 1000 respectivement. Pour ce problème, le nombre de Reynolds est défini comme  $Re = \frac{\rho U_{wall} L'}{\mu}$ . Tel que précédemment énoncé, aux tableaux IV et V, aucune distinction n'est faite entre les divers algorithmes de calcul (séquentielle/couplée, Picard/Newton),



Tableau IV

vitesses minimales et maximales aux axes centraux- $Re = 400$ 

Méthode	maillage	$\frac{U_{min}}{U_{max}}$	$\frac{V_{min}}{U_{max}}$	$\frac{V_{max}}{U_{max}}$
MAW	$32 \times 32$	-0.2290	-0.3610	0.2196
MAW	$64 \times 64$	-0.2608	-0.3902	0.2449
MAW	$96 \times 96$	-0.2780	-0.4079	0.2597
MAW	$128 \times 128$	-0.2884	-0.4180	0.2687
FLO	$32 \times 32$	-0.2796	-0.3994	0.2608
FLO	$64 \times 64$	-0.3097	-0.4336	0.2867
FLO	$96 \times 96$	-0.3191	-0.4436	0.2951
FLO	$128 \times 128$	-0.3231	-0.4477	0.2987
Ghia [34]	$129 \times 129$	-0.3273	-0.4499	0.3020

puisque ces derniers n'affectent pas les valeurs des solutions convergées.

Avec l'utilisation du schéma FLO, la méthode de CVFEM proposée produit des résultats se comparant bien aux calculs de référence de Ghia et al. [34]. Toutefois, les résultats obtenus par le schéma de MAW affichent systématiquement une précision moindre ce qui correspond aux observations de Saabas, Masson et Baliga [5, 59].

Les bénéfices d'une formulation couplée sont quantifiables en termes d'efficacité de calcul et de robustesse. Ainsi, l'absence de relaxation dans la procédure de calcul couplée témoigne de sa robustesse supérieure par rapport à l'approche séquentielle qui nécessite obligatoirement l'application de sous-relaxation pour pallier à la faiblesse de son couplage itératif vitesse-pression. Dans la méthode de Newton, le seul traitement spécial nécessaire consiste à retarder l'introduction des termes de convection linéarisés dans la matrice Jacobienne pendant quelques itérations afin d'amorcer l'algorithme jusqu'à l'obtention d'une solution approximée suffisamment réaliste. Ainsi, concrètement, les non-linéarités sont introduites lorsque la somme adimensionnée de la valeur absolue des résidus des équations discrétisées est inférieure ou égale à  $10^{-1}$ , ce qui correspond à environ quatre

Tableau V

vitesses minimales et maximales aux axes centraux- $Re = 1000$ 

Méthode	Maillage	$\frac{U_{min}}{U_{wall}}$	$\frac{V_{min}}{U_{wall}}$	$\frac{V_{max}}{U_{wall}}$
MAW	$32 \times 32$	-0.2561	-0.4230	0.2362
MAW	$64 \times 64$	-0.2798	-0.4385	0.2664
MAW	$96 \times 96$	-0.3015	-0.4571	0.2885
MAW	$128 \times 128$	-0.3162	-0.4699	0.3036
FLO	$32 \times 32$	-0.3061	-0.4551	0.2898
FLO	$64 \times 64$	-0.3419	-0.4828	0.3271
FLO	$96 \times 96$	-0.3596	-0.4988	0.3458
FLO	$128 \times 128$	-0.3692	-0.5079	0.3562
Ghia [34]	$129 \times 129$	-0.3829	-0.5155	0.3709

itérations. Afin d'évaluer l'efficacité des diverses formulations proposées, la figure 20 présente l'évolution de l'effort de calcul normalisé nécessaire pour atteindre une convergence correspondant à une valeur de la somme adimensionnée des résidus inférieure à  $10^{-8}$  pour chacun des systèmes d'équations discrétisées. Les résidus des équations ont été adimensionnalisés en utilisant les valeurs de référence de longueur et de vitesse  $L$  et  $U_{wall}$  respectivement. L'effort de calcul adimensionné correspond au temps de calcul informatique (CPU) requis pour un processus donné divisé par le temps CPU nécessaire à la solution du problème de la cavité entraînée par la formulation séquentielle utilisant la procédure de solution de Gauss-Seidel pour  $Re = 400$  sur un maillage  $128 \times 128$  noeuds. Ce temps de calcul de référence par lequel tous les efforts de calcul sont normalisés a une valeur numérique de 5196 secondes tel qu'obtenu sur un ordinateur possédant un processeur Pentium IV de 1.9 GHz et utilisant le système d'exploitation Linux Mandrake 8.1 et le compilateur GNU fortran(v0.5.24). Les résultats ont été obtenus sur la base du schéma FLO pour le problème de cavité entraînée à  $Re = 400$ . Les deux solutions séquentielles présentées diffèrent uniquement au niveau de la méthode de solution du système d'équations linéaires. Dans le contexte d'une solution séquentielle sur maillage structuré, une résolution basée sur un algorithme ligne par ligne de Gauss-Seidel apparaît clairement

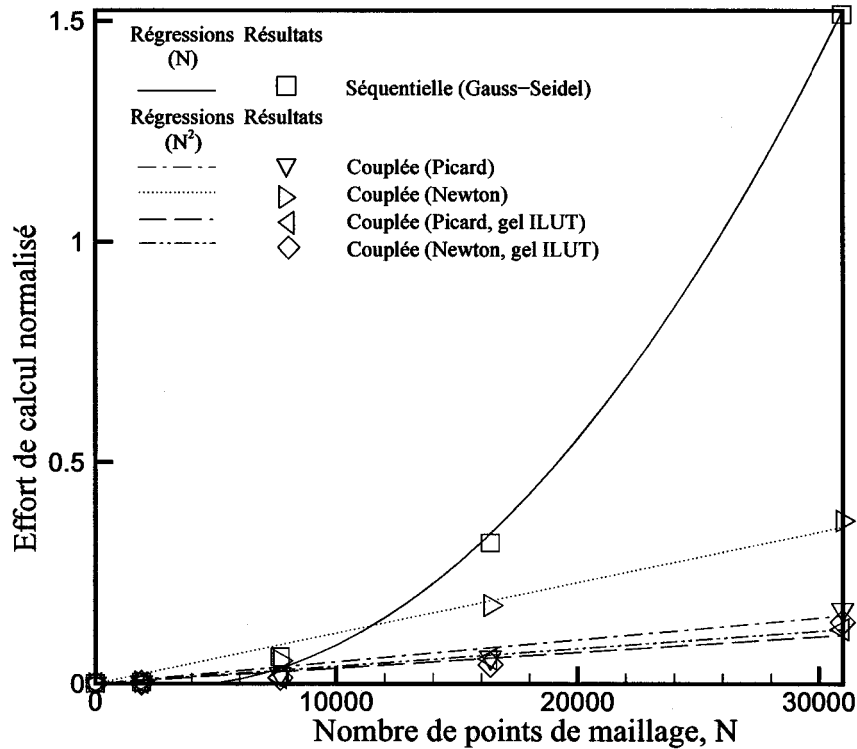


Figure 20 Évolution de l'effort de calcul normalisé en fonction du nombre  $N$  de points de maillage, problème de la cavité entraînée  $-Re = 400$ , schéma FLO

plus efficace qu'une méthode bâtie autour de l'algorithme GMRES(m) préconditionné par une décomposition ILUT. Plus encore, la différence d'efficacité entre les deux méthodes croît avec le nombre de points (voir figure 20). Bien que beaucoup plus simple à mettre en oeuvre, une résolution de type ligne par ligne de Gauss-Seidel profite au maximum de la structure multi-diagonale du système d'équations discrétisées et s'avère par conséquent plus efficace. Ainsi, dans le contexte de maillages structurés, aucun gain d'efficacité ne semble être retiré de l'usage d'un algorithme de solution itératif non-stationnaire tel que GMRES(m). Tel qu'énoncé précédemment à la section 4.2.3, pour des raisons

de conservation de la masse, les solutions couplées nécessitent que toutes les inconnues du problème soient actualisées simultanément sur l'ensemble du domaine de calcul durant la résolution du système linéaire rendant obligatoire l'usage d'un algorithme de type non-stationnaire. Pour ces raisons, toutes les améliorations d'efficacité de la méthode couplée sur la méthode séquentielle doivent uniquement être attribuées au couplage implicite vitesse-pression et non pas à la technique de résolution du système linéaire. Sans égard au nombre de points du maillage, toutes les formulations couplées sont plus efficaces que les approches séquentielles. Les évolutions de l'effort de calcul normalisé de ces dernières en fonction du nombre  $N$  de points de maillage semblent suivre une croissance quadratique ( $N^2$ ) alors que celles des méthodes couplées présentent un comportement linéaire ( $N$ ). Les régressions quadratiques et linéaires présentées à la figure 20 ont été interpolées aux résultats avec une précision en  $R^2$  supérieure à 95%. Ainsi, en comparaison avec l'approche séquentielle, l'efficacité relative des méthodes couplées augmente avec le nombre de points de maillage. De la figure 21, on constate que pour un maillage de  $128 \times 128$  noeuds, la méthode séquentielle utilisant la résolution de Gauss-Seidel est trois fois plus rapide que celle faisant usage de GMRES(m). La figure 21 permet également d'établir que la méthode couplée proposée utilisant la technique de linéarisation de Newton et la stratégie de gel du pré-conditionnement est la plus efficace et se révèle 34 fois plus rapide que l'approche séquentielle basée sur la résolution de Gauss-Seidel. Étant donné que la plupart des applications pratiques numériques en mécanique des fluides impliquent un nombre de points de maillage supérieur à 16000, des économies substantielles de temps de calcul peuvent être réalisées par l'usage d'une formulation couplée, particulièrement dans le contexte d'une procédure d'optimisation nécessitant la réalisation de nombreux calculs. L'accélération de la convergence réalisée à travers la linéarisation de Newton des termes de convection représente des économies de 40 à 50% en terme d'effort de calcul normalisé par rapport à une linéarisation classique de Picard. À travers l'étude de l'historique de la convergence des méthodes présentée à la figure 22 pour le problème de la cavité entraînée à  $Re = 400$  sur un maillage de  $128 \times 128$  noeuds, on peut approfondir la compréhension

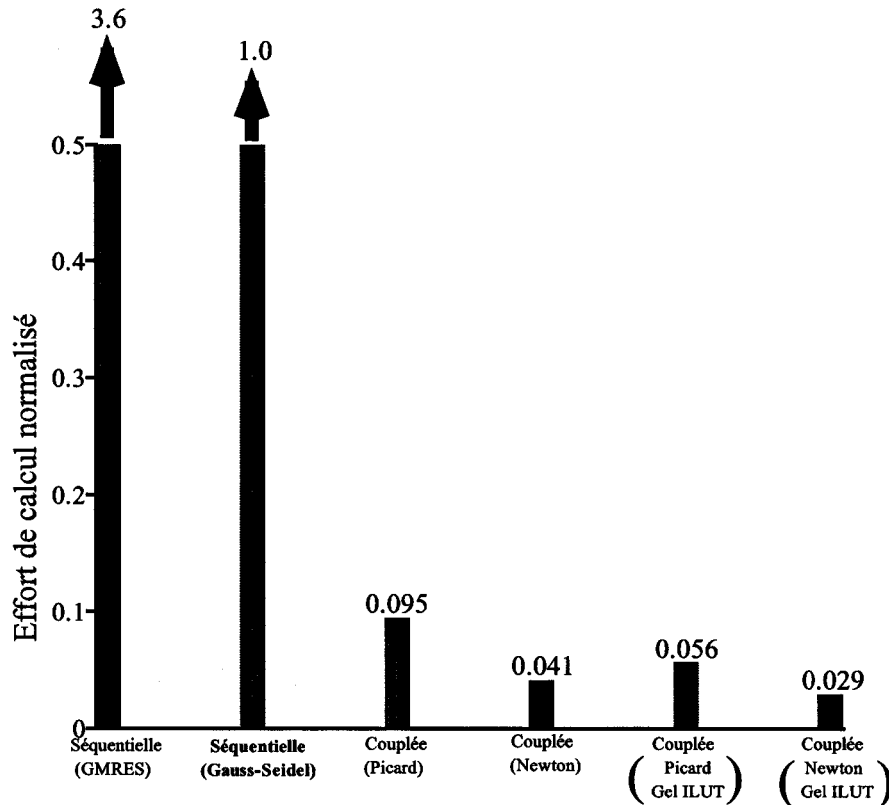


Figure 21 Effort de calcul normalisé pour le maillage  $128 \times 128$ , problème de la cavité entraînée -Re = 400, schéma FLO

de l'effet du couplage implicite. Ainsi, contrairement à la solution séquentielle, les deux méthodes couplées exhibent des convergences monotones. Mais la différence la plus marquante réside dans le taux de convergence par itération; 14 300 itérations sont nécessaires afin d'atteindre un résidu inférieur à  $10^{-8}$  pour la méthode séquentielle alors que 27 et 13 itérations sont requises par les méthodes couplées pour réaliser une convergence similaire avec les linéarisations de Picard et de Newton respectivement. Ce résultat souligne le caractère hautement itératif des méthodes séquentielles dans lesquelles les itérations ont le double rôle de résoudre les non-linéarités des équations aux dérivées partielles tout en

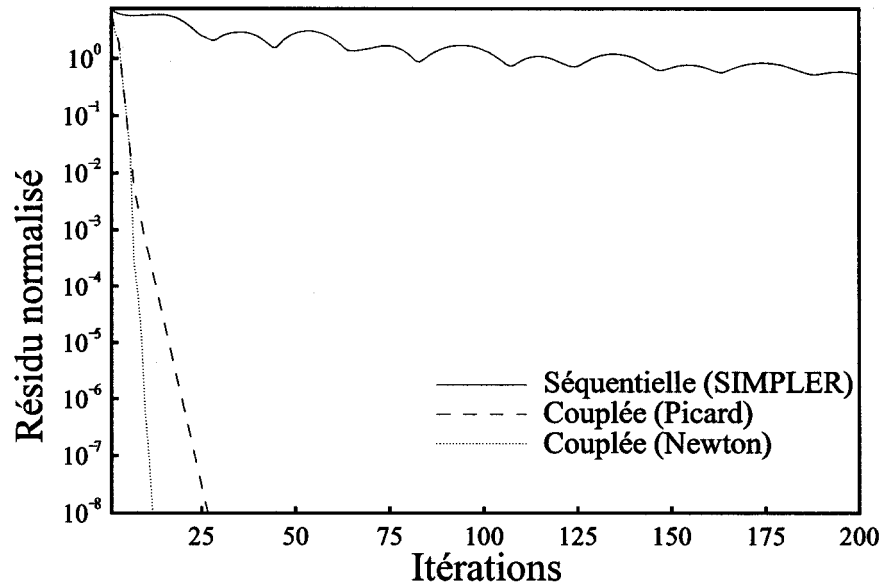


Figure 22 Historique de convergence, problème de la cavité entraînée - $Re = 400$ , maillage  $128 \times 128$ , schéma FLO

réalisant le couplage de ces équations. À la lumière de ces résultats, il apparaît que lors des solutions séquentielles, l'essentiel du travail itératif est effectué pour réaliser le couplage des équations alors que dans le cas des algorithmes couplés, la seule fonction des itérations est de résoudre les non-linéarités. Toutefois, ces réductions du nombre d'itérations ne se traduisent pas par des économies proportionnelles de temps de calcul. Ce résultat provient de la croissance géométrique de l'effort de calcul de la méthode de résolution du système d'équations linéaires (GMRES) avec la taille du problème couplé. Par opposition, la croissance de la charge de calcul d'une résolution ligne par ligne par un algorithme de Gauss-Seidel est une fonction quasi-linéaire du nombre de noeuds du problème. Un autre élément contribuant au ralentissement des algorithmes couplés réside dans l'ajustement des paramètres de l'algorithme de solution; le nombre d'entrées non-nulles lors de la décomposition ILUT et la taille maximale du sous-espace de Krylov doivent être augmentés

pour assurer la convergence de la méthode de Newton. Ainsi, un des éléments clé pour garantir le succès des solutions couplées réside dans l'utilisation d'un algorithme efficace et robuste pour la résolution du système d'équations linéaires.

#### 4.3.2 Écoulement autour d'un cylindre circulaire

Les simulations d'écoulements dans des cavités entraînées a permis de vérifier la précision et l'efficacité de la méthode couplée proposée pour résoudre des problèmes d'écoulements internes faisant intervenir des conditions frontières de type Dirichlet. Dans cette section, la méthode couplée est validée pour des écoulements externes laminaires et stationnaires autour d'un cylindre circulaire. Le nombre de Reynolds est défini comme  $Re_d = U_\infty d / \nu$ , avec  $d$  le diamètre du cylindre et  $U_\infty$  la vitesse de l'écoulement libre. Les simulations furent entreprises pour des nombres de Reynolds inférieurs à la valeur seuil de  $Re_d = 46 \pm 1$ , au dessus de laquelle le sillage derrière le cylindre devient instationnaire et le phénomène d'émission des tourbillons de Karman apparaît [93]. Ainsi, pour les nombres de Reynolds de  $Re_d = 20$  et  $40$ , auxquels les simulations ont été entreprises, l'écoulement autour du cylindre est stationnaire et symétrique par rapport à un axe transverse parallèle à la direction de l'écoulement libre ( $\vec{U}_\infty = U_\infty \vec{i}$ ). Par conséquent, en prenant avantage de la symétrie du problème, le domaine de calcul peut être réduit de moitié. Toutes les simulations ont été entreprises sur le demi maillage en O présenté à la figure 23. Deux quantités ont été utilisées pour mesurer la précision des solutions : le coefficient de traînée défini par  $C_D = D / (1/2) \rho U_\infty^2 d$  et la longueur de la zone de recirculation,  $L_W$ . Une étude de maillage a permis d'établir qu'un domaine de calcul de  $130d$  de rayon est nécessaire pour minimiser les effets des frontières externes sur l'écoulement et obtenir un coefficient de traînée dont la valeur dévie de moins de 0.2% par rapport aux résultats de référence de Fornberg [30]. Selon le même critère de précision, il a été démontré qu'un maillage constitué de 88 points sur la surface du demi-cylindre et 148 points dans la direction radiale est requis pour obtenir des solutions indépendantes du maillage. La figure 24 qui présente le tracé de ligne de courant fait apparaître la zone de recirculation principale derrière le

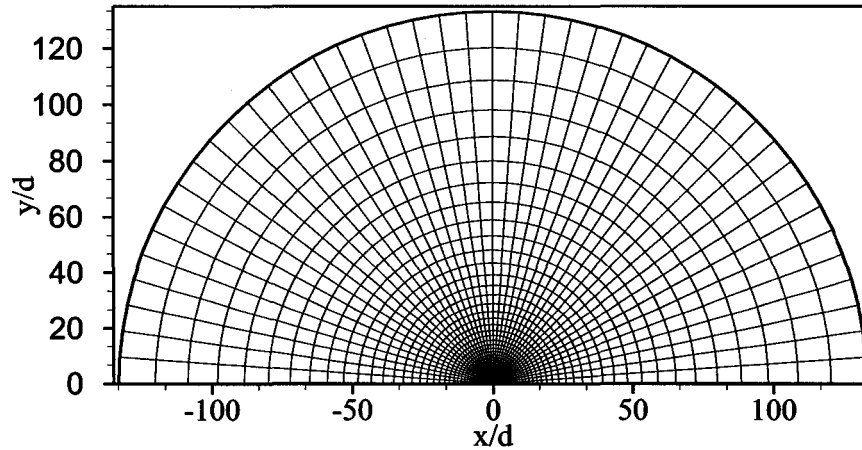


Figure 23 Demi maillage en O utilisé pour les simulations de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. Seul un point sur deux est présenté

cylindre pour un nombre de Reynolds de  $Re = 40$ . Le tableau VI compare les valeurs de coefficient de traînée  $C_D$  et de longueur de la bulle de recirculation  $L_W$  à  $Re = 20$  et 40 avec des résultats publiés [30, 93]. Tel qu'attendu, les simulations faisant usage du schéma FLO sont en très bon accord avec les calculs de référence de Fornberg [30] aussi bien pour le coefficient de traînée  $C_D$  que pour la longueur de la zone de recirculation  $L_W$ . Les coefficients de traînée obtenus se comparent également bien aux résultats expérimentaux de Tritton [93], particulièrement pour le nombre de Reynolds le plus élevé. Les simulations avec le schéma de MAW affichent systématiquement une précision moindre, ce qui confirme les résultats obtenus au cas test précédent. Tous les calculs faisant usage du schéma FLO ont été entrepris avec un algorithme couplé étant donné l'incapacité systématique à converger de la procédure séquentielle indépendamment des valeurs des coefficients de relaxation et des paramètres de résolution du système linéaire. De telles difficultés de convergence ont déjà été rapportées par Saabas et Baliga [81] lors de l'usage du schéma FLO dans le contexte d'une résolution séquentielle. Ces faiblesses de la méthode peuvent être attribuées aux nombres de Peclet élevés sur les éléments de maillage



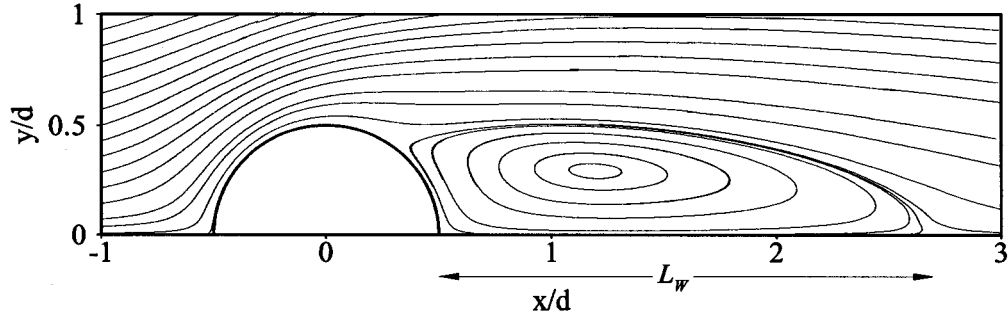


Figure 24 Lignes de courant pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire- $Re = 40$ , schéma FLO

de grandes dimensions situés en périphérie du domaine de calcul (voir figure 23). Des difficultés de convergence furent également observées lors de l'utilisation de la linéarisation de Newton, mais furent résolues simplement en augmentant le nombre d'entrées non-nulles du pré-conditionnement ILUT. Toutes ces observations confirment clairement la robustesse supérieure des méthodes couplées par rapport aux méthodes séquentielles. La figure 25 présente l'évolution de l'effort de calcul normalisé en fonction du nombre de points du maillage. Ces résultats correspondent à des solutions convergées jusqu'à une valeur de  $10^{-8}$  pour la somme adimensionnée des valeurs absolues des résidus de chacun des systèmes d'équations discrétisées. Les résidus furent adimensionnalisés par rapport aux valeurs de référence de longueur  $d$  et de vitesse  $U_\infty$ . Tout comme lors du premier problème test, l'effort de calcul a également été normalisé par rapport au temps de calcul requis par la formulation séquentielle utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel pour le problème de cavité entraînée à  $Re = 400$  sur un maillage de  $128 \times 128$  points. Les résultats obtenus correspondent à la solution numérique de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à un nombre de Reynolds de  $Re = 40$  avec le schéma de MAW. Tel qu'observé pour le problème de la cavité entraînée, sans égard aux nombres de points de maillage, toutes les formulations couplées sont plus efficaces que les formulations séquentielles. Les évolutions des efforts de calcul suivent une croissance quadratique ( $N^2$ ) pour les méthodes

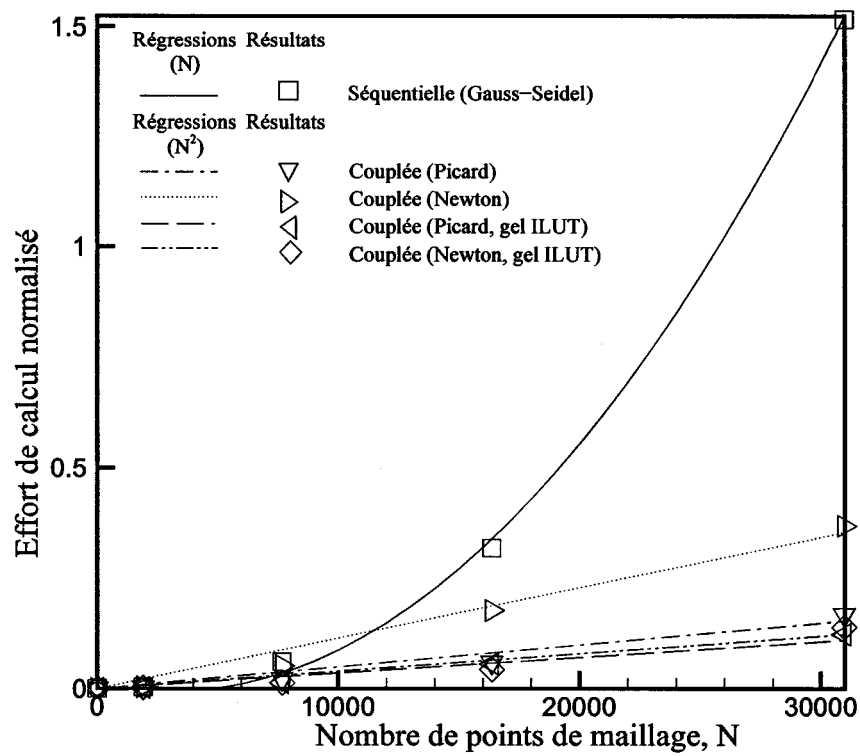


Figure 25 Évolution de l'effort de calcul normalisé en fonction du nombre N de points de maillage, écoulement autour d'un cylindre circulaire- $Re = 40$ , schéma MAW

Tableau VI

Comparaisons du coefficient de traînée  $C_D$  et de la longueur de la bulle de recirculation  $L_W$  (Mesurée à partir de l'arrière du cylindre)- $Re = 20$  et  $40$ .<sup>1</sup>Deux maillages superposés furent employés pour ces calculs

Nombre de Reynolds→		20		40	
Méthode	Maillage	$C_D$	$L_W/d$	$C_D$	$L_W/d$
MAW	$88 \times 138$	2.08	0.83	1.59	1.80
FLO	$88 \times 138$	2.00	0.90	1.50	2.20
Tritton [93]	Exp.	2.22	N/A	1.48	N/A
Fornberg [30] <sup>1</sup>	$129 \times 132$	2.00	0.91	1.50	2.24
	$65 \times 52$				

séquentielles alors qu'un comportement linéaire ( $N$ ) est constaté pour les algorithmes couplés. Des régressions quadratiques et linéaires ont été superposées aux résultats, tel que présenté à la figure 25. La figure 26 démontre que pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à  $Re = 40$ , sur un demi maillage en O contenant 98 points sur la surface du cylindre et 167 points dans la direction radiale (i.e. 16 366 points), la méthode couplée proposée utilisant la linéarisation de Newton et la stratégie de gel du pré-conditionnement est 7.6 fois plus rapide que la méthode séquentielle avec solution de Gauss-Seidel. Il est intéressant de remarquer que, pour la méthode couplée, la linéarisation de Newton nécessite plus du double de l'effort de calcul par rapport à la linéarisation de Picard lorsqu'aucune stratégie de gel du pré-conditionnement n'est appliquée. Pour l'écoulement autour du cylindre, la méthode de Newton souffre de difficultés de convergence qui sont corrigées en augmentant le nombre d'entrées non-nulles dans la décomposition ILUT et la taille maximum de l'espace de Krylov. Toutefois, ce remède entraîne l'effet indésirable d'augmenter la charge de calcul requise pour la solution du système linéaire jusqu'à des niveaux prohibitifs. L'application de la linéarisation de Newton requiert une combinaison économique d'un pré-conditionnement et d'un algorithme de solution de système d'équations linéaires pour être profitable. L'utilisation de la stratégie de gel du pré-conditionnement

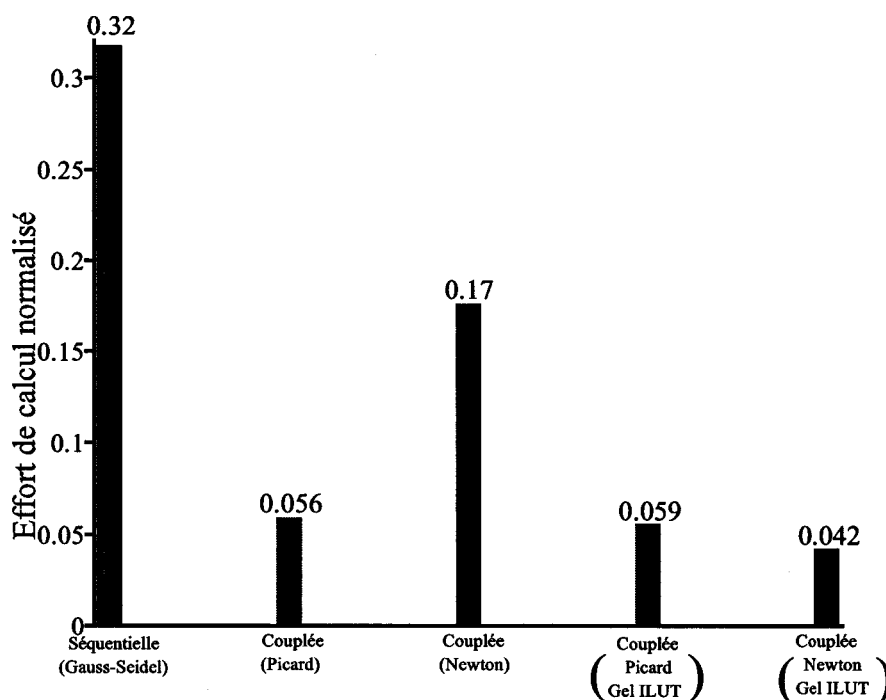


Figure 26 Effort de calcul normalisé pour le maillage, écoulement autour d'un cylindre circulaire- $Re = 40$ , maillage de  $98 \times 167$ , schéma MAW

ILUT réduit grandement l'effort de calcul associé à la linéarisation de Newton. L'étude de l'historique de convergence présenté à la figure 27 pour le cylindre circulaire à  $Re = 40$  sur un maillage de  $98 \times 167$  (16366 points) permet de tirer quelques conclusions sur le comportement des algorithmes couplés. En comparaison avec le cas de la cavité entraînée à  $Re = 400$  sur un maillage de  $128 \times 128$  (16384 points), le nombre d'itérations requis pour converger est divisé par trois pour la méthode séquentielle, est augmenté d'un tiers (à 16) et réduite d'un cinquième (à 21) pour les méthodes couplées utilisant respectivement les linéarisations de Newton et de Picard. Ces résultats suggèrent que pour la méthode

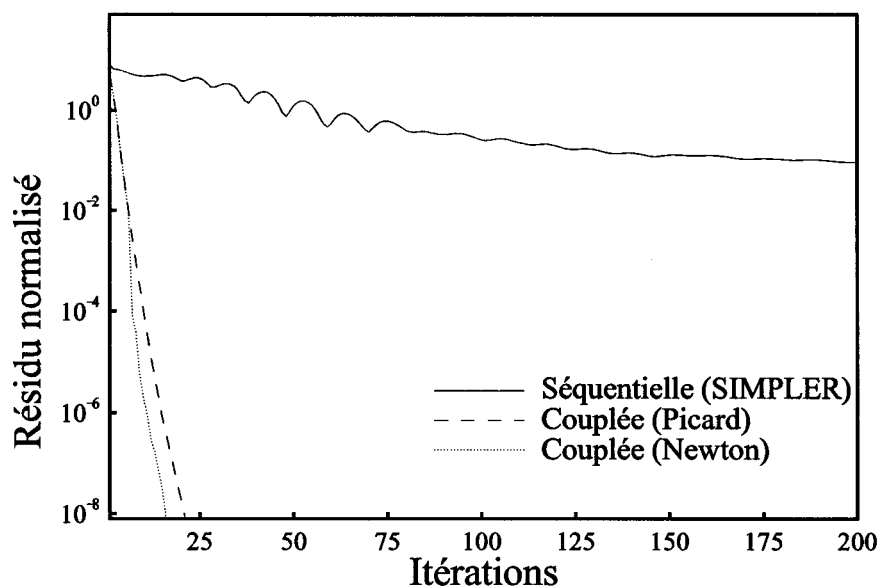


Figure 27 Historique de convergence, écoulement autour d'un cylindre circulaire- $Re = 40$ , maillage de  $98 \times 167$ , schéma MAW

séquentielle, le travail itératif réalisé pour le couplage des équations est proportionnellement moindre pour le cas de l'écoulement autour d'un cylindre que pour le cas de la cavité entraînée. Ceci expliquerait le plus faible gain d'efficacité des méthodes couplées sur les méthodes séquentielles pour le présent cas test. Ainsi, bien qu'il soit prématuré d'énoncer des conclusions strictes quant au comportement des algorithmes couplés, il semble apparaître que la nature physique du problème traité influence l'efficacité relative des méthodes couplées par rapport à leur pendant séquentiel. Pour des problèmes tels que la cavité entraînée où des phénomènes de type elliptique sont présents sur l'ensemble du domaine de calcul, le couplage des équations semble nécessiter un effort plus important que pour des problèmes quasi-paraboliques dominés par un écoulement dans une direction principale tel que l'écoulement autour d'un cylindre.

#### 4.4 Conclusion sur la solution numérique de l'écoulement

En conclusion, une méthode de CVFEM couplée pour la solution des équations stationnaires de Navier-Stokes a été mise en oeuvre et validée par la résolution de problèmes d'écoulements confinés et externes. Une comparaison systématique entre les deux formulations séquentielles et les quatre formulations couplées a permis d'établir les bénéfices et les forces liés au couplage et à la procédure de linéarisation. Ainsi, les remarques comparatives suivantes peuvent être énoncées quant au comportement et à la performance des méthodes de CVFEM couplées et séquentielles et des procédures de linéarisation de Picard et de Newton :

- les méthodes couplées proposées sont plus robustes que les méthodes séquentielles. Dans certaines circonstances, les méthodes couplées permettent la convergence du système d'équations discrétisées bâties sur le schéma de FLO alors que les formulations séquentielles divergent;
- indépendamment du problème traité, les méthodes couplées sont plus efficaces que les méthodes séquentielles en terme de temps de calcul. Ce gain d'efficacité croît de manière quadratique avec le nombre de points du maillage et représente des économies de temps de calcul substantielles dans le cas de maillages importants (jusqu'à 34 fois plus rapide);
- l'utilisation de la linéarisation de Newton entraîne une réduction du nombre d'itérations pour converger par rapport à celle de Picard;
- la linéarisation de Newton est moins robuste que celle de Picard et la solution de son système d'équations linéaires nécessite un travail plus important.

Toutes les conclusions précédentes ne tiennent que dans le contexte de problèmes laminaires. Le comportement d'une méthode couplée similaire faisant intervenir des équations supplémentaires liées à des variables turbulentes ne peut être extrapolé du présent travail. L'élément clef qui semble garantir le succès des méthodes couplées réside dans l'utilisation d'une méthode de solution robuste et efficace pour le système d'équations linéaires.

Une conclusion définitive quant à la performance de la linéarisation de Newton par rapport à celle de Picard ne peut être établie sans une évaluation exhaustive et complète des algorithmes de solution et de pré-conditionnement pour systèmes linéaires.

## CHAPITRE 5

### DIFFÉRENCIATION DE LA FONCTION OBJECTIF ET ALGORITHME D'OPTIMISATION

Au chapitre précédent, la méthode numérique de CVFEM employée pour le calcul de l'écoulement autour de profils aérodynamiques a été décrite. Pour un profil donné, cette méthode permet d'obtenir les valeurs des variables d'états discrètes (i.e. vitesse, pression) intégrées afin d'établir les coefficients de performance aérodynamique du profil ( $C_L$ ,  $C_D$ ). Dans le contexte d'une optimisation aérodynamique, ces coefficients de performance sont utilisés pour évaluer la fonction objectif à optimiser. L'utilisation d'un algorithme d'optimisation basé sur le gradient, tels que les algorithmes quasi-Newton, nécessite la connaissance des dérivées de la fonction objectif par rapport aux paramètres de conception définissant la géométrie du profil (i.e. points de contrôle de la NUBS). Tel qu'établi au chapitre 2 dans le présent travail doctoral, l'obtention de ces dérivées est réalisée par le calcul de sensibilités discrètes. La première section du présent chapitre décrit en détail la méthode de calcul des sensibilités par la technique des récurrences simplifiées (RS). Les aspects essentiels à la mise en oeuvre de la méthode y seront également présentés puis la précision et la performance de cette approche seront évaluées par rapport à une différenciation par différence finie. La seconde section du chapitre est consacrée à la présentation de l'algorithme d'optimisation DFP (Davidson-Fletcher-Powell) [21, 28].

#### 5.1 Méthode des sensibilités discrètes par la technique des récurrences simplifiées

##### 5.1.1 Modèle mathématique

En OA, la fonction objectif à optimiser dépend des variables d'états  $\phi$  et de la géométrie du profil défini par le vecteur  $x_c$  contenant la position des points de contrôle du profil :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi, x_c) \tag{2.1}$$



La différenciation de la fonction objectif par rapport à  $x_c$  implique :

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dx_c}\Big|_{x_c^{(n)}} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_c}\Big|_{x_c^{(n)}} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\Big|_{x_c^{(n)}} \frac{d\phi}{dx_c}\Big|_{x_c^{(n)}} \quad (2.2)$$

L'indice  $(n)$  indique que les dérivées sont obtenues pour une géométrie spécifique  $x_c^{(n)}$ . Les termes  $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_c}\Big|_{x_c^{(n)}}$  et  $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi}\Big|_{x_c^{(n)}}$  sont en général relativement simples à obtenir par différenciation algébrique mais la difficulté réside dans l'évaluation du terme  $\frac{d\phi}{dx_c}\Big|_{x_c^{(n)}}$ . Ce terme,  $\frac{d\phi}{dx_c}\Big|_{x_c^{(n)}}$ , appelé sensibilité représente les dérivées des variables d'états  $\phi$  par rapport aux paramètres géométriques de conception  $x_c$ . Dans un souci de polyvalence et de facilité de mise en oeuvre des problèmes, dans ce travail, les équations de sensibilités sont obtenues par l'approche discrétisée puis différenciée (voir section 2.2.3.3). Cette approche implique la différenciation du problème itératif discret d'intérêt et aboutit au développement d'équations de sensibilités dites discrètes. Ainsi, tel qu'établi à la section 4.2.4 du chapitre précédent, pour une itération  $t$  du processus de solution couplée des équations de Navier-Stokes par linéarisation de Newton, on résout le système linéaire suivant :

$$J_t \delta\phi_t = -R(\phi_t) \quad (4.23)$$

où  $\phi_t$  correspond à la solution approximée,  $R_t$  représente les résidus des équations discrétisées de Navier-Stokes, soit les équations de  $u, v, \hat{u}, \hat{v}$  et  $p$  pour la formulation proposée et où la matrice Jacobienne  $J_t$  symbolise l'opérateur linéarisé du problème. L'indice  $t$  indique que les valeurs ont été obtenues à l'itération  $t$ . La progression de la méthode vers la nouvelle solution approximée est donnée par :

$$\phi_{t+1} = \phi_t + d\delta\phi_t \quad (4.24)$$

Ainsi, chaque itération du processus de solution nécessite l'évaluation de  $J_t$  et  $R(\phi_t)$  jumelée à la solution du système (4.23) pour  $\delta\phi_t$ . La différenciation de ce processus itératif de solution par rapport à une variable de conception  $x_{c_i}$  aboutit à la création d'un nouveau

problème itératif appelé récurrence pleinement différenciée :

$$J'_t \delta \phi_t + J_t \delta \phi'_t = -R'(\phi_t) \quad (5.1)$$

L'exposant  $t$  fait référence à l'opérateur  $d/dx_{c_i}$ . Supposons maintenant qu'à la suite de  $t$  itérations de solution du processus (4.23)-(4.24),  $\phi$  soit convergé au sens numérique pour un critère de convergence donné. Sous cette condition, la valeur de  $\phi$  n'évolue "presque plus" d'itération en itération et réciproquement, la valeur de  $\delta \phi$  est très "faible". Plus encore, l'opérateur  $J_t$  qui est une fonction de  $\phi$  ne changera "presque plus" après que  $\phi$  ait convergé. Par une analyse comparative des ordres de grandeurs, il apparaît que si  $\delta \phi_t$  est très petit par rapport à  $J'_t$ , alors le premier terme de l'équation (5.1) est proche de 0 et peut être négligé du calcul des sensibilités. De la même façon,  $J_t$  peut être considéré constant et l'équation de récurrence pour le calcul des sensibilités peut être simplifiée en :

$$J_* \delta \phi'_t \approx -R'(\phi_t) \quad (5.2)$$

Où  $J_*$  correspond à la valeur de  $J_t$  lorsque  $\phi$  a convergé. La progression des sensibilités d'une itération à l'autre est donnée par :

$$\phi'_{t+1} = \phi'_t + d\delta \phi'_t \quad (5.3)$$

L'équation (5.2) est appelée équation de récurrence simplifiée. Une présentation plus complète et rigoureuse de la technique des récurrences simplifiées est donnée aux Références [36,38]. Gilbert [36] a démontré de manière stricte que si le système original (4.23) converge alors le système simplifié (5.2) de dérivées converge aussi. De plus, il peut aussi être démontré que par rapport à l'approche pleinement différenciée, l'approche simplifiée possède un taux de convergence supérieur et une stabilité accrue résultant de l'hypothèse où  $J_t$  est constant [38]. Il est également à noter que la méthode simplifiée ne requiert pas l'évaluation de  $J'_t \delta \phi_t$  ce qui devrait la rendre plus efficace en terme d'effort de calcul. On

constate également la grande similarité entre le système de sensibilité simplifiée (5.2) et le système original non-différencié (4.23) ce qui peut être exploité afin d'accroître l'efficacité de la solution des sensibilités. Ainsi, la même procédure de solution du système linéaire, optimisée pour le système original, peut être employée avec une efficacité comparable pour le système différencié. Plus encore,  $J_*$  étant fixe, le pré-conditionnement par décomposition ILUT du système simplifié qui représente près de 80% de l'effort de calcul global de la procédure de solution est effectué une seule fois lors de la dernière itération du système original et conservé en mémoire pour toutes les solutions de sensibilité subséquentes. De par la nature fixe de  $J_*$ , il est également envisageable de résoudre l'ensemble des systèmes d'équations de sensibilité simultanément par l'emploi d'une méthode de résolution pour système linéaire possédant des membres de droite multiples. La seule inconnue quant à l'emploi de la technique des récurrences simplifiées réside dans la détermination du critère de convergence seuil de la solution de l'écoulement à partir duquel cette approximation est valable. Ce critère dépend du problème traité et doit être déterminé de manière ad-hoc. La section suivante de résultats présente une étude de validité de l'approximation des récurrences simplifiées en fonction des valeurs de convergence de l'écoulement pour le problème d'optimisation de forme de profil aérodynamique.

La structure couplée de la méthode de CVFEM proposée facilite grandement la mise en oeuvre d'une procédure de différenciation par récurrences simplifiées. Ainsi, dans l'algorithme couplé, les opérations de création de la matrice Jacobienne, de calcul du résidu et de solution du système linéaire sont facilement séparables et peuvent être aisément modifiés pour le calcul des sensibilités. Dans la procédure de calcul séquentiel où la discrétisation, le calcul des résidus et la solution des équations suivent un schéma complexe et entrelacé (voir algorithme séquentiel à la section 4.2.2), la mise en oeuvre d'une différenciation par récurrences simplifiées représente une somme de travail importante. La séquence d'opérations transformant l'information initiale de la position des points de contrôle  $x_c$  jusqu'au

calcul de la fonction objectif  $\mathcal{F}(\phi, x_c)$  est donnée par :

$$x_c \rightarrow x_m \rightarrow \phi \rightarrow \mathcal{F}(\phi, x_c) \quad (5.4)$$

Ainsi, la position des points de contrôle,  $x_c$ , détermine la position des points discrets du profil qui induisent eux mêmes la position des points de maillage,  $x_m$ . Puis, le calcul de l'écoulement par la méthode de CVFEM établit les valeurs des variables dépendantes discrètes  $\phi$  à partir de  $x_m$  et des conditions frontières. Finalement, la fonction objectif est évaluée à partir des variables dépendantes,  $\phi$ , et de la position des points de maillages,  $x_m$ . Dans notre cas et d'une manière générale, le passage de  $x_c$  à  $x_m$  s'effectue dans un module de calcul distinct du module de calcul de l'écoulement et l'évaluation de la dérivée du résidu  $R'(\phi_t)$  (équation (5.2)) par rapport à  $x_c$ , est faite par l'usage de la règle de la dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} R'(\phi_t) = \frac{dR}{dx_{c_i}} &= \frac{\partial R}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dx_{c_i}} + \frac{\partial R}{\partial u} \frac{du}{\partial x_{c_i}} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{dv}{\partial x_{c_i}} + \frac{\partial R}{\partial \hat{u}} \frac{d\hat{u}}{dx_{c_i}} \\ &+ \frac{\partial R}{\partial \hat{v}} \frac{d\hat{v}}{dx_{c_i}} + \frac{\partial R}{\partial p} \frac{dp}{dx_{c_i}} + \frac{\partial R}{\partial d^u} \frac{d(d^u)}{dx_{c_i}} + \frac{\partial R}{\partial d^v} \frac{d(d^v)}{dx_{c_i}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les termes  $\frac{du}{\partial x_{c_i}}, \frac{dv}{\partial x_{c_i}}, \frac{d\hat{u}}{dx_{c_i}}, \frac{d\hat{v}}{dx_{c_i}}, \frac{dp}{dx_{c_i}}, \frac{d(d^u)}{dx_{c_i}}$  et  $\frac{d(d^v)}{dx_{c_i}}$  correspondent aux variables de sensibilités,  $\phi' = \frac{d\phi}{dx_{c_i}}$ , et représentent les inconnues du système (5.2), tandis que les termes  $\frac{\partial R}{\partial x_m}, \frac{\partial R}{\partial u}, \frac{\partial R}{\partial v}, \frac{\partial R}{\partial \hat{u}}, \frac{\partial R}{\partial \hat{v}}, \frac{\partial R}{\partial p}, \frac{\partial R}{\partial d^u}$  et  $\frac{\partial R}{\partial d^v}$  sont obtenus par différenciation des équations discrétisées du système original (4.23). L'ensemble des opérations de différenciation nécessaires au calcul de  $R'(\phi_t)$  ont été effectuées de manière analytique manuellement. L'usage d'un outil de différenciation automatique (voir section 2.2.3) aurait pu grandement simplifier la mise en oeuvre de ce calcul mais il en résulterait un code source sur-dimensionné et difficilement modifiable et exploitable. Lors du développement de la méthode, chacune des contributions de l'équation (5.5) a été vérifiée par comparaison à des différences finies afin de limiter la possibilité d'erreurs d'implantation. Dans l'algorithme de solution de l'écoulement, les coefficients de gradient de pression  $d^u$  et  $d^v$  sont solutionnés dans

une procédure externe à la résolution du système (4.23). Ainsi, les valeurs de  $d^u$  et  $d^v$  sont mises à jour de manière purement explicite après chaque solution du système couplé (4.23). Une procédure similaire ne semble cependant pas fonctionner pour la solution des équations de sensibilité. Il apparaît qu'il est nécessaire de construire un système de solution implicite pour obtenir les sensibilités  $\frac{d(d^u)}{dx_{c_i}}$  et  $\frac{d(d^v)}{dx_{c_i}}$ . Ce système est solutionné par l'usage d'une procédure semblable à celle employée pour les systèmes (4.23) et (5.2), basée sur l'algorithme GMRES(m) et le pré-conditionnement par décomposition ILUT.

### 5.1.2 Mouvement du maillage

Le terme  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$  (équation (5.5)) correspond à la dérivée de la position des points discrets du maillage par rapport à la position des points de contrôle définissant la géométrie du profil. Ce terme est obtenu par différenciation de la représentation mathématique (NUBS) de la géométrie du profil. Le terme  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$  calculé lors de l'étape de modélisation géométrique et de génération du maillage constitue l'élément moteur qui dirige le calcul des sensibilités. Si on suppose la solution numérique de l'écoulement indépendante du maillage, le mouvement d'un point de contrôle,  $x_c$ , devrait uniquement entraîner le mouvement de points de maillage,  $x_m$ , situés sur la surface du profil. Par conséquent les termes discrets  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$  devraient être non-nuls uniquement sur le contour du profil. Il apparaît cependant qu'il est pratiquement impossible d'obtenir une solution indépendante du maillage au sens des sensibilités. Ceci implique qu'afin d'obtenir des sensibilités ayant un intérêt pratique, il faut nécessairement introduire des termes non-nuls  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$  correspondants à la déformation du maillage autour du profil de manière à conserver une topologie similaire et constante. En conformant le maillage à la géométrie du profil, on élimine ainsi des sensibilités, les contributions parasites provenant de la dépendance de la solution numérique de l'écoulement par rapport au maillage. Une approche consistant à perturber un des points de contrôle du profil et à régénérer le maillage de manière à obtenir les termes  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$  par différence finie produit des résultats erronés. Par cette approche, les gradients  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$  obtenus à la périphérie du maillage peuvent avoir de très grandes valeurs qui semblent perturber

et dominer le calcul des sensibilités même dans la proximité du profil. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire une stratégie de mouvement de maillage dont la grandeur des déplacements s'atténue de manière inversement proportionnelle à la distance au profil. La procédure de déformation du maillage retenue dans ce travail est similaire à celle décrite à la référence [12]. Le présent travail fait usage de maillage structuré en C. Des lignes de maillage normales issues du profil sont dirigées radialement vers l'extérieur du domaine de calcul; l'index entier  $q$  fait référence à un ordonnancement croissant des points sur les lignes radiales de maillage dont la valeur initiale de  $q = 1$  est fixée aux points situés sur la surface du profil. Lors du mouvement d'un point de contrôle de la NUBS, la stratégie de déplacement du maillage devrait permettre de préserver les distances entre les points sur la surface du profil et les premiers points dans la direction radiale (i.e.  $q = 2$ ). Ainsi, suite au déplacement d'un point de contrôle du profil, la nouvelle position d'un point interne situé sur une ligne de maillage radiale est donné par :

$$x_q^{new} = x_q^{old} + \Delta x_1(1 - S_q) \quad (5.6)$$

où  $\Delta x_1$  représente la variation de la position d'un point situé sur le profil et  $S_q$  est la distance normalisée définie par :

$$S_q = \frac{\sum_{i=2}^q L_i}{\sum_{i=2}^{q_{max}} L_i} \quad (5.7)$$

où  $L_i$  correspond à la distance des segments entre chaque point.

### 5.1.3 Mise en oeuvre

L'algorithme global pour l'obtention des sensibilités et de la dérivée de la fonction objectif par rapport à chaque variable de conception peut se résumer en la séquence d'opérations suivantes effectuées à la suite du calcul de l'écoulement :

1. lecture et mise en mémoire des informations concernant le maillage, la solution convergée de l'écoulement et les termes discrets  $\frac{dx_m}{dx_{c_i}}$ ;
2. initialisation du champ des sensibilités à 0;
3. calcul des résidus,  $R'(\phi_t)$  (équation 5.5);
4. solution du système de récurrences simplifiées (équation 5.2);
5. solution du système pour  $d^u$  et  $d^v$ ;
6. retour à l'étape 2 et répétition jusqu'à convergence;
7. calcul de la dérivée de la fonction objectif  $\mathcal{F}$  (équation (2.2)).

D'une manière similaire au calcul de l'écoulement, les étapes 3-6 sont répétées jusqu'à ce que la somme adimensionnée de la valeur absolue des résidus des équations discrétisées de sensibilité pour  $u'$ ,  $v'$  et  $p'$ , soit inférieure ou égale à  $10^{-8}$ . Tel que déjà mentionné, la solution des équations de sensibilité (étape 4) ne requiert que l'usage de GMRES(m) puisque le pré-conditionnement de  $J_*$  par décomposition ILUT a déjà été effectué lors de la dernière itération du calcul de l'écoulement. Les opérations 1-7 sont répétées pour l'obtention de chacune des composantes du gradient de la fonction objectif par rapport à l'ensemble des variables de conception. Au niveau informatique, la solution couplée du système d'équations de sensibilité nécessite un peu moins du double de l'espace mémoire requis pour le calcul de l'écoulement et c'est par conséquent elle qui limite la taille et la complexité des problèmes d'optimisation abordables. La section suivante des résultats évalue la méthode des sensibilités proposées en terme de validité, de précision et d'efficacité de calcul.

#### 5.1.4 Résultats

Tel que présenté à la section précédente, la méthode de calcul des sensibilités par récurrences simplifiées permet d'obtenir le champ des dérivées des variables d'états par rapport aux variables de conception définissant la géométrie du profil. Les dérivées correspondantes d'une fonction objectif établie à partir des coefficients de performance aérodyna-

mique du profil ( $C_L$  et  $C_D$ ) peuvent être déduites de ce champ de dérivées par l'équation 2.2. Afin d'illustrer la validité, la précision et l'efficacité de l'approche proposée pour

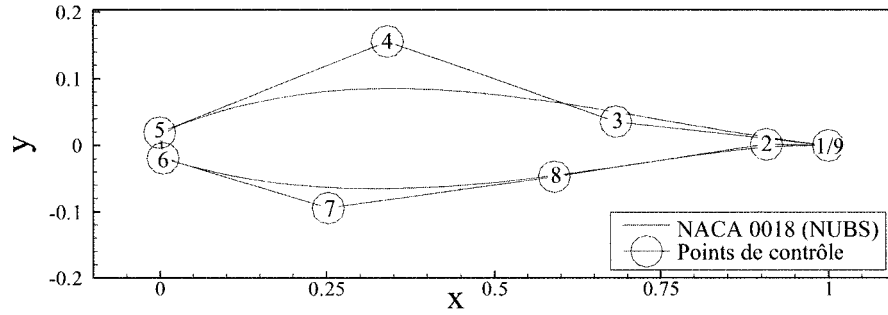


Figure 28 Profil NACA-0018 approximé par une NUBS possédant neuf points de contrôle

l'obtention des dérivées d'une fonction objectif, un profil NACA 0018 approximé par une NUBS possédant neuf points de contrôle est étudié. Tel que présenté à la figure 28, les points de contrôle identifiés par des cercles sont numérotés de un à neuf dans le sens antihoraire à partir du bord de fuite alors que la géométrie du profil est décrite par une ligne continue. Les résultats provenant de la méthode proposée sont comparés à ceux obtenus par la technique des différences finies (voir section 2.2.3). Le maillage en C utilisé pour l'ensemble des calculs présentés dans cette section est constitué de  $241 \times 55$  points de calcul; la surface du profil est discrétisée par 160 points, les premiers points de calcul dans la direction radiale sont situés à une distance normale de  $10^{-4}$  corde par rapport à la surface du profil et les frontières externes du domaine de calcul sont placées à 30 cordes du profil. Les cas tests présentés sont basés sur des conditions d'écoulement laminaire correspondant à un nombre de Reynolds de  $Re_c = \frac{\rho U_{\infty} c}{\mu} = 40$  et un angle d'attaque nul du profil. Les figures 29 présentent les isocontours des dérivées de vitesse et de pression par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 4,  $y_c(4)$  (voir figure 28). Les figures 29 annotées a), b), et c) correspondent aux isocontours de dérivées obtenus par différences finies pour les variables  $u$ ,  $v$  et  $p$  respectivement alors que les figures 29 a') b') et c') présentent



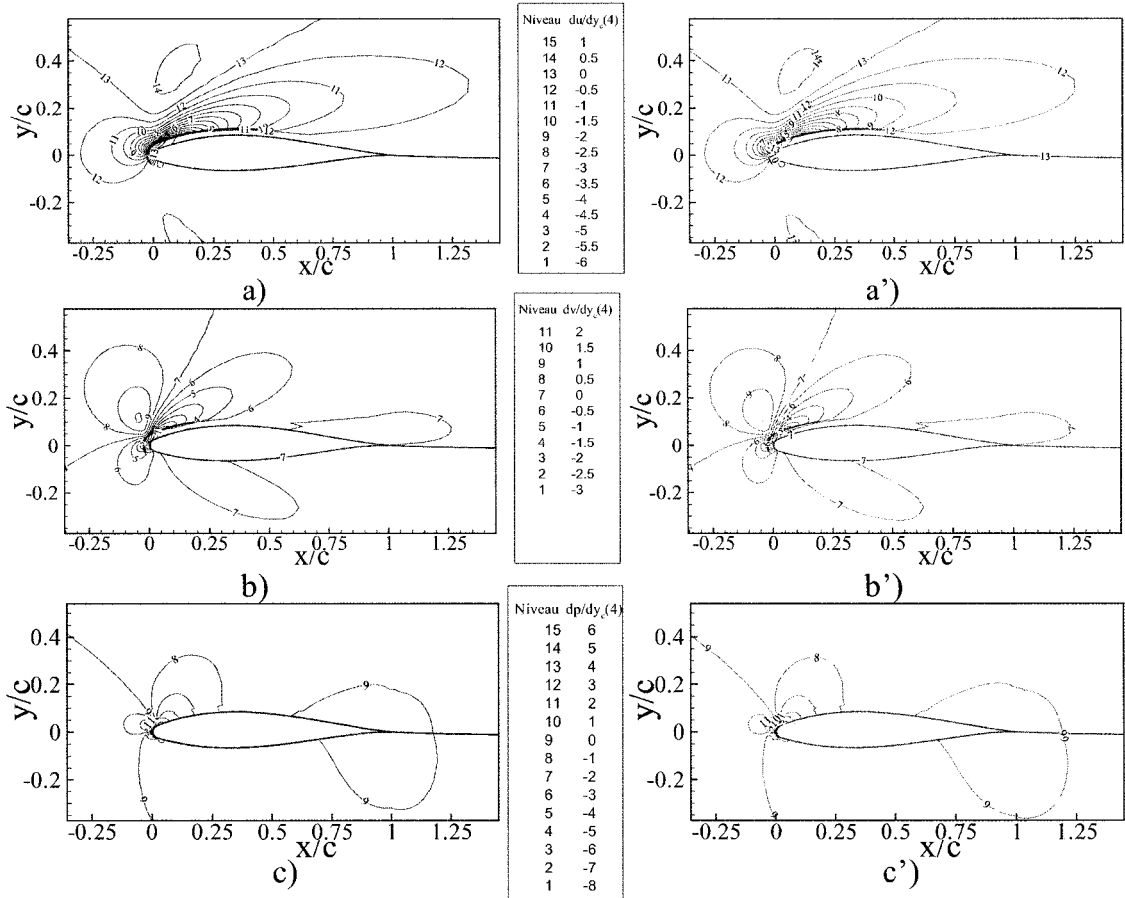


Figure 29 Isocontours des dérivées par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 4,  $y_c(4)$  autour du profil NACA 0018 : a)  $\frac{du}{dy_c(4)}$  différences finies, b)  $\frac{dv}{dy_c(4)}$  différences finies, c)  $\frac{dp}{dy_c(4)}$  différences finies, a')  $\frac{du}{dy_c(4)}$  méthode proposée, b')  $\frac{dv}{dy_c(4)}$  méthode proposée, c')  $\frac{dp}{dy_c(4)}$  méthode proposée

des résultats similaires obtenus par la méthode proposée de récurrences simplifiées. Bien que seules les sensibilités des points de calcul situés sur le contour du profil soient nécessaires à l'évaluation de la dérivée de la fonction objectif, il est néanmoins intéressant de constater la très bonne concordance sur l'ensemble du domaine de calcul, entre les sensibilités obtenues par différences finies et celles calculées par la méthode proposée. Tel qu'attendu, les dérivées les plus élevées en valeur absolue se situent autour de la zone du profil dont la géométrie est régie par le point de contrôle 4 (voir figure 28). Des courbes similaires auraient pu être tracées pour les dérivées des variables  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $d^u$  et  $d^v$ , mais le sens physique de ces dernières aurait été plus limité. Pour la méthode des différences finies, la grandeur adéquate des perturbations afin de donner des résultats manifestes a été établie à  $\Delta x_c = 10^{-8}$  suite à une étude paramétrique. La portance,  $L$ , et la traînée de pression,  $D_P$ , sont toutes deux déduites de la distribution de pression sur le contour du profil par intégration numérique. Par conséquent, les dérivées des coefficients associés à ces deux propriétés ( $C'_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}$ ,  $C'_{D_P} = \frac{D_P'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}$ ) dépendent de la dérivée correspondante de cette distribution de pression. La figure 30 compare les dérivées de pression par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7,  $x_c(7)$ , distribuées sur le contour du profil NACA 0018 obtenu par différences finies et par la méthode proposée. Le graphique est adimensionnalisé en abscisse où  $S$  représente la distance linéaire d'un point sur le profil par rapport au bord de fuite en suivant un sens de parcours antihoraire et  $S_{TOT}$  correspond à la longueur totale de la courbe du profil. L'ordonnée du graphique correspond à la dérivée de la pression par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7,  $\frac{dp}{dx_c(7)}$ . À l'échelle du graphique, les courbes correspondant aux dérivées de pression obtenues par différences finies et par récurrences simplifiées paraissent superposées. Bien que qualitatif, ce graphique démontre l'excellente concordance des deux méthodes pour le calcul des dérivées de pression. D'un point de vue physique, on constate encore que les dérivées les plus importantes apparaissent dans la zone du profil subissant l'influence du point de contrôle 7. Tel que mentionné à la section 5.1.2, le calcul des sensibilités doit inclure une procédure de mouvement du maillage autour du profil afin de préserver la position relative des points

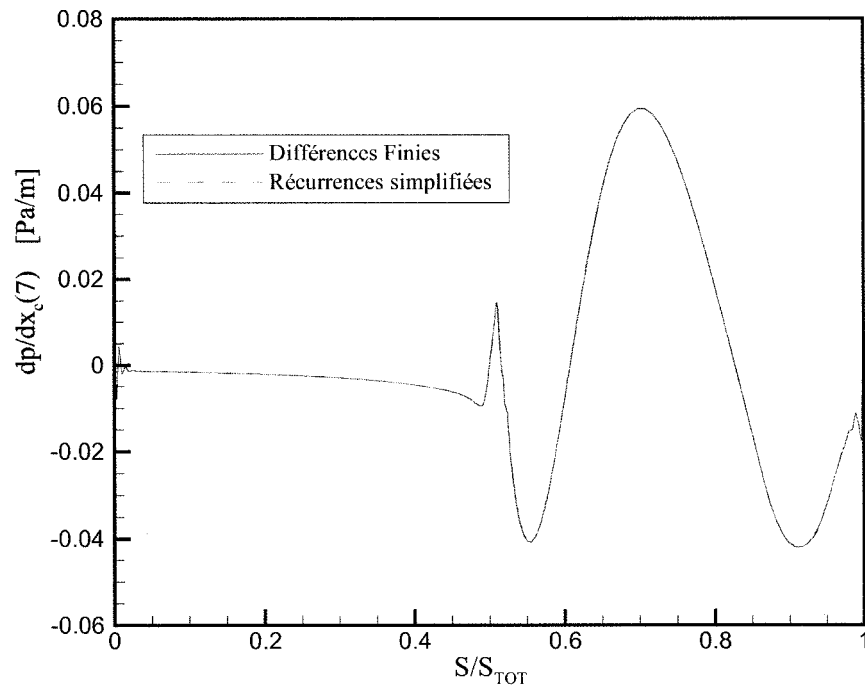


Figure 30 Dérivée de la pression par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7,  $x_c(7)$ , sur la surface du profil NACA 0018

de calcul par rapport à la surface du profil. Si seuls les déplacements des points sur le profil sont considérés, les dérivées obtenues renferment alors l'effet de la dépendance de la solution par rapport au maillage, perturbation sans intérêt qui viendrait compromettre le succès de la procédure globale d'optimisation aérodynamique de forme. La figure 31 compare les distributions de dérivées de pression par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7, obtenues avec et sans procédure de mouvement de maillage. Les différences observées entre les deux approches témoignent de la nécessité d'inclure le mouvement du maillage au calcul des sensibilités afin d'obtenir des résultats d'intérêt puisque le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme d'optimisation afin de converger vers l'optimum est directement corrélé à la précision du gradient. Il est à noter que ce constat n'est pas propre

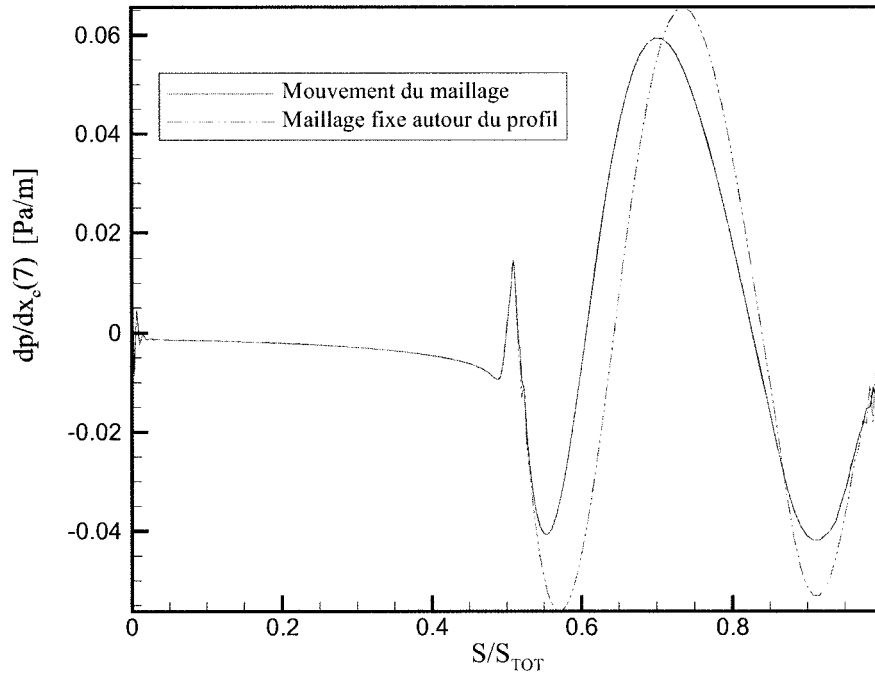


Figure 31 Influence du mouvement du maillage sur la dérivée de la pression par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7,  $x_c(7)$ , autour de la surface du profil NACA 0018

à un type de méthode de calcul des sensibilités et concerne autant l'approche par différences finies que par récurrences simplifiées. Toutefois, la convergence des équations de sensibilité par récurrences simplifiées est grandement améliorée par l'usage d'une stratégie de mouvement du maillage. Conséquemment, tous les calculs de sensibilité du présent document incorporent la procédure de mouvement de maillage telle que présentée à la section 5.1.2. La traînée de friction  $D_f$ , composante de la traînée provenant du cisaillement visqueux, peut être évaluée de manière consistante par sommation des résidus des équations discrétisées de quantité de mouvement en  $x$  pour l'ensemble des volumes de contrôle situés sur la surface du profil. Le calcul de  $D_f$  implique donc toutes les variables

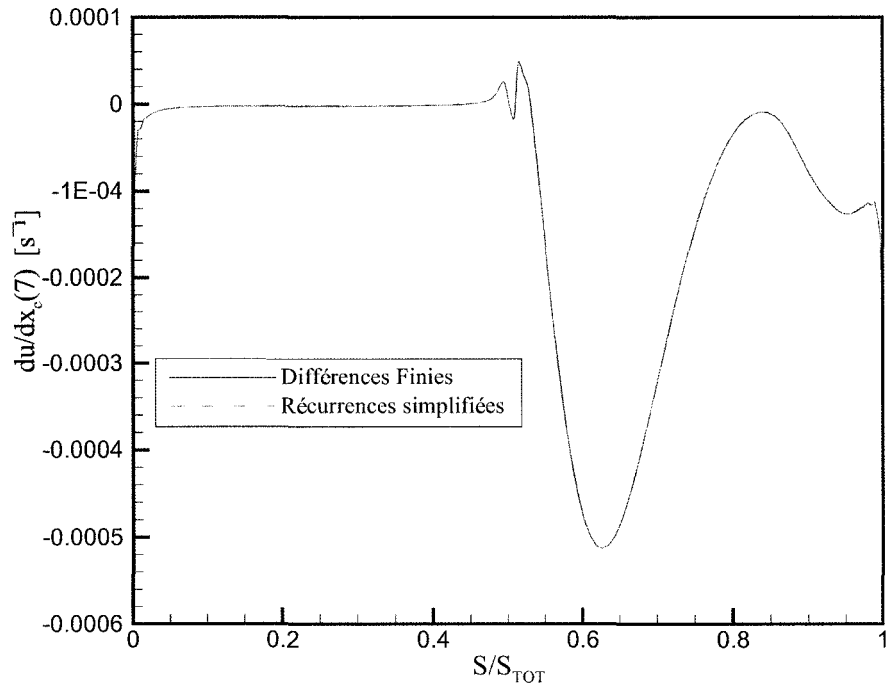


Figure 32 Dérivée de la composante de vitesse en x par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7,  $x_c(7)$ , sur les noeuds voisins à la surface du profil NACA 0018

dépendantes de tous les noeuds de calcul situés sur la surface du profil ainsi que leurs voisins. Par conséquent, l'évaluation de la dérivée du coefficient de traînée de friction  $C'_{D_f} = \frac{D'_f}{\frac{1}{2}\rho V^2_c}$  par rapport à la position d'un point de contrôle du profil fait intervenir entre autres les dérivées des composantes de vitesse des points de calcul voisins à la surface du profil. Les figures 32 et 33 présentent respectivement les dérivées des composantes de vitesses en x et en y par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7,  $x_c(7)$ , sur les noeuds voisins à la surface du profil NACA 0018. Pour ces graphiques, la définition de S et  $S_{TOT}$  s'apparente désormais au contour défini par les noeuds voisins du profil. Tel qu'observé dans le cas de la dérivée de pression, visuellement, on ne distingue pas de différence entre les dérivées de vitesse obtenues par différences finies et celles provenant de la méthode

proposée. D'un point de vue physique on observe que la grandeur des dérivées de vitesse

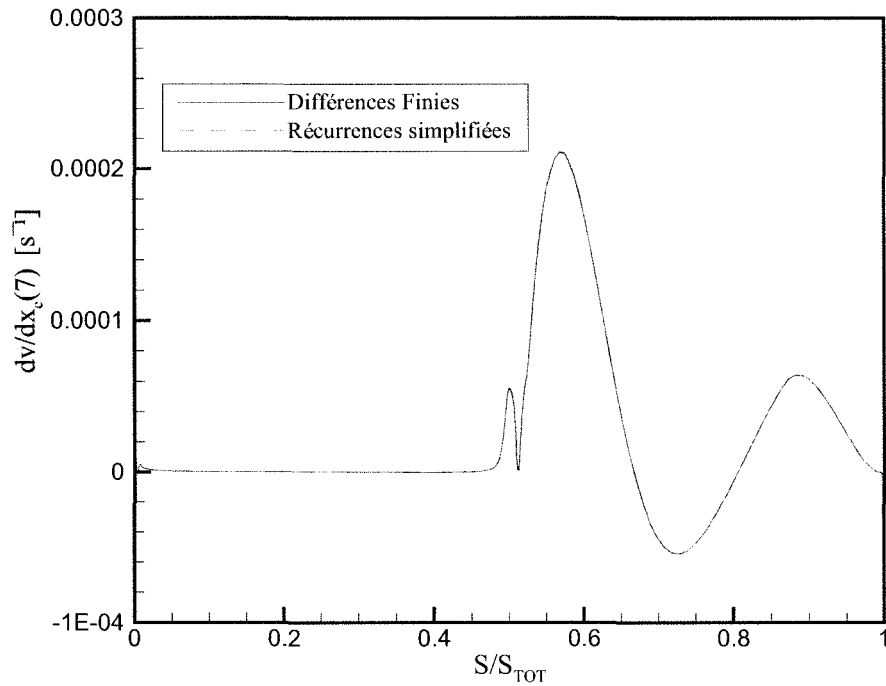


Figure 33 Dérivée de la composante de vitesse en y par rapport à l'abscisse du point de contrôle 7,  $x_c(7)$ , sur les noeuds voisins à la surface du profil NACA 0018

est moins importante que celle des dérivées de pression. Afin de quantifier la précision de la méthode proposée de récurrences simplifiées par rapport aux différences finies, les dérivées des coefficients aérodynamiques ont été évaluées et présentées au tableau VII pour le paramètre  $y_c(7)$ . Les erreurs relatives commises sur les dérivées des coefficients de traînée sont inférieures à 0.1% alors que celles associées à la dérivée de la portance est inférieure à 1%. Ces différences relativement faibles devraient avoir une influence négligeable sur la convergence globale de l'algorithme d'optimisation aérodynamique. Afin de confirmer ces résultats, un tableau comparatif similaire a été réalisé pour les dérivées des coefficients

Tableau VII

Comparaison des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7,  $y_c(7)$ , obtenues par différences finies et par récurrences simplifiées, profil NACA 0018

Coefficients aérodynamiques	Différences finies	Récurrences simplifiées	Erreur relative
$dC_{D_P}/dy_c(7) \text{ [m}^{-1}\text{]}$	-.93920E-1	-.93838E-1	.087%
$dC_{D_t}/dy_c(7) \text{ [m}^{-1}\text{]}$	-.13528	-.13537	.066%
$dC_{D_{TOT}}/dy_c(7) \text{ [m}^{-1}\text{]}$	-.22920	-.22921	.004%
$dC_L/dy_c(7) \text{ [m}^{-1}\text{]}$	.77417E-1	.77826E-1	.53%

aérodynamiques par rapport à l'abscisse du point de contrôle 2,  $x_c(2)$  (voir tableau VIII). Bien que les erreurs réalisées soient légèrement supérieures à celles du cas test précédent, ces valeurs restent inférieures à 1% et ne devraient pas modifier de façon perceptible la convergence de la procédure d'optimisation aérodynamique.

Dans la présentation de tous les résultats qui précèdent, aucune référence n'a été faite quant au niveau de convergence des méthodes numériques de solution de l'écoulement et des sensibilités. Ainsi, les résultats précédents correspondent à des niveaux de convergence proches du zéro machine soit environ  $10^{-13}$ . Tel que présenté à la section précédente, les équations constitutives de la technique des récurrences simplifiées (équation (5.2)) sont obtenues à partir du système d'équations discrétisées de Navier-Stokes pleinement différenciées (équation (5.1)) en négligeant le terme  $J'_t \delta \phi_t$ . Cette hypothèse fondamentale sur laquelle repose la validité de la méthode implique donc un niveau de convergence minimum du système d'équations couplées de Navier-Stokes en dessous duquel le terme  $J'_t \delta \phi_t$  est suffisamment petit pour être négligé sans que cela n'affecte significativement la solution des sensibilités. Le tableau IX présente la variation des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport au niveau de convergence de la solution des équations de Navier-Stokes autour du profil NACA 0018. Les résultats présentés correspondent aux dé-

Tableau VIII

Comparaison des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport à l'abscisse du point de contrôle 2,  $x_c(2)$ , obtenues par différences finies et par récurrences simplifiées, profil NACA 0018

Coefficients aérodynamiques	Différences finies	Récurrences simplifiées	Erreur relative
$dC_{D_P}/dx_c(2) [m^{-1}]$	-.40094E-2	-.40425E-2	.82%
$dC_{D_t}/dx_c(2) [m^{-1}]$	.25889E-1	.25955E-1	.25%
$dC_{D_{TOT}}/dx_c(2) [m^{-1}]$	.21880E-1	.21913E-1	.15%
$dC_L/dx_c(2) [m^{-1}]$	-.28901E-1	-.28678E-1	.77%

Tableau IX

Variation des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport au niveau de convergence de la solution des équations de Navier-Stokes autour du profil NACA 0018

Coefficients aérodynamiques	Convergence (Résidus adimensionnels)			
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-12}$
$dC_{D_P}/dy_c(7) [m^{-1}]$	-.093829E-1	-.093838E-1	-.093838E-1	-.093838E-1
$dC_{D_t}/dy_c(7) [m^{-1}]$	-.13532	-.13537	-.13537	-.13537
$dC_{D_T}/dy_c(7) [m^{-1}]$	.22915	.22921	.22921	.22921
$dC_L/dy_c(7) [m^{-1}]$	.76987E-1	.77833E-1	.77826E-1	.77826E-1

rivées des coefficients par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7,  $y_c(7)$ . Le niveau de convergence des équations de Navier-Stokes correspond à la somme adimensionnée de la valeur absolue des résidus de chaque équation discrétisée (voir 4.2). Une convergence de  $10^{-4}$  sur les équations de Navier-Stokes permet de fixer 5 chiffres significatifs sur les dérivées des coefficients de traînée, alors qu'une convergence de  $10^{-6}$  est nécessaire pour obtenir un résultat similaire sur la dérivée du coefficient de portance. Ainsi, pour tous les résultats présentés à la suite de ce document, le critère de convergence a été fixé à  $10^{-6}$  pour les équations de Navier-Stokes afin d'obtenir une précision correspondant à



Tableau X

Variation des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport au niveau de convergence des équations de sensibilité obtenues par récurrences simplifiées pour le profil NACA 0018

Coefficients aérodynamiques	Convergence (Résidus adimensionnels)			
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-12}$
$dC_{D_P}/dy_c(7) [m^{-1}]$	-.093829E-1	-.093838E-1	-.093838E-1	-.093838E-1
$dC_{D_t}/dy_c(7) [m^{-1}]$	-.13532	-.13537	-.13537	-.13537
$dC_{D_T}/dy_c(7) [m^{-1}]$	.22915	.22921	.22921	.22921
$dC_L/dy_c(7) [m^{-1}]$	.76987E-1	.77833E-1	.77826E-1	.77826E-1

cinq chiffres significatifs sur les dérivées des coefficients aérodynamiques. Cette conclusion reste ad-hoc et correspond à un problème et à une formulation spécifiques et ne doit pas être considérée comme une règle définitive garantissant la validité de l'approche par récurrences simplifiées.

Après avoir établi le critère de convergence pour la solution de l'écoulement, il faut également déterminer le critère de convergence des équations de sensibilité. Le tableau X présente la variation des dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport au niveau de convergence de la solution des équations de sensibilité. Les résultats présentés correspondent aux dérivées des coefficients par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 7,  $y_c(7)$ . Le niveau de convergence des équations de sensibilité fait référence à la somme adimensionnée de la valeur absolue des résidus de chaque équation discrétisée. Les résidus des équations de sensibilité ont été adimensionnalisés par  $\rho U_\infty^2/c$  pour les équations de dérivée de vitesse et  $\rho U_\infty/c$  pour l'équation de dérivée de pression. Tout comme pour les équations de Navier-Stokes, une convergence de  $10^{-4}$  sur les équations de sensibilité permet de fixer cinq chiffres significatifs sur les dérivées des coefficients de traînée, alors qu'une convergence de  $10^{-6}$  est nécessaire pour obtenir un résultat similaire sur la dérivée

du coefficient de portance. Ainsi, dans la suite de ce document, pour tous les calculs, le critère de convergence des équations de sensibilité a été fixé à  $10^{-6}$ .

Après avoir déterminé les niveaux de convergence requis pour l'obtention de résultats significatifs pour les sensibilités, il est opportun d'évaluer l'efficacité de la méthode proposée par rapport aux différences finies. La figure 34 compare l'historique de convergence d'un calcul de sensibilité à celui d'un calcul de l'écoulement. Sur la base des résidus normalisés, les deux méthodes démontrent des taux de convergence relativement similaires. Ainsi, pour l'obtention de résidus inférieurs à  $10^{-6}$ , huit itérations sont nécessaires dans le cas du calcul de l'écoulement alors que six itérations suffisent pour les sensibilités. Ainsi, sur la seule base de la réduction du nombre d'itérations, les gains d'efficacité de la méthode de sensibilité proposée par rapport à une approche par différences finies seraient faibles. Le réel gain de performance de la méthode de sensibilité proposée réside plutôt dans la diminution du temps de calcul par itération. Tel que mentionné à la section précédente lors de la description de la méthode des sensibilités par la technique des récurrences simplifiées, de part la nature constante de la matrice du système de sensibilité, ce dernier ne requiert pas de pré-conditionnement par factorisation ILUT pour sa résolution. Le pré-conditionnement par factorisation ILUT représente environ 80% du temps de solution lors des calculs de l'écoulement. Par conséquent, des diminutions appréciables de temps de calcul devraient être observées pour la méthode des sensibilités proposée par rapport à une approche par différence finie. Les temps de calculs présentés ci-après ont été obtenus sur un ordinateur équipé d'un microprocesseur Intel Pentium IV cadencé à 2.8 GHz et opérant le système d'exploitation Linux Red Hat noyau 2.4.20-13.9 et le compilateur Gnu fortran v3.2.2. Le temps de calcul machine nécessaire pour effectuer un calcul de l'écoulement autour du profil sur le maillage de  $241 \times 55$  points et pour un nombre de Reynolds de 40 est de 503 secondes. Ainsi, par la technique des différences finies, l'évaluation des sensibilités et des dérivées d'une fonction objectif requiert un nombre de simulations de l'écoulement correspondant au nombre de variables de conception. Par récurrences simplifiées, le temps

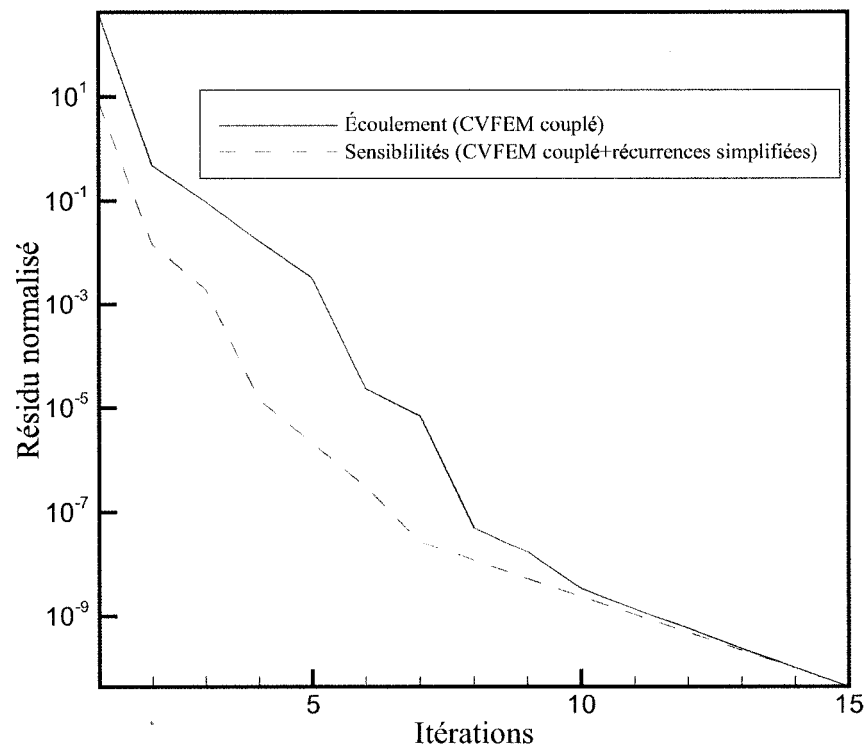


Figure 34 Historique de convergence, profil NACA 0018,  $Re=40$ , (i) écoulement (CV-FEM couplée), (ii) sensibilités, dérivée par rapport à l'ordonnée du point de contrôle 4,  $y_c(4)$  (CVFEM + récurrences simplifiées)

de calcul machine des sensibilités correspondant à un paramètre de conception est de 52 secondes. Ce résultat correspond à la moyenne des temps de calcul obtenus pour les sensibilités de l'ensemble des 14 paramètres de conception du profil NACA 0018 considéré dans cette section. En comparaison, le calcul de chaque dérivée d'une fonction objectif par différences finies est 9.67 fois plus élevé que celui associé aux récurrences simplifiées. Ces résultats révèlent toute leur signification lorsqu'on les extrapole à une optimisation complète type d'un profil décrit par une NUBS possédant 19 points de contrôle soit 34 paramètres de conception, effectuée en supposant 15 itérations de l'algorithme d'optimisation basé sur le gradient. Ce processus nécessiterait alors 9 heures 28 minutes à l'aide des récurrences simplifiées plutôt que 73 heures 13 minutes en utilisant les différences finies. Cet écart de plus de deux jours et demi de temps de calcul entre les deux méthodes pour une application pratique justifie sans équivoque la mise en oeuvre et l'utilisation de la méthode des sensibilités par récurrences simplifiées.

### 5.1.5 Conclusion sur la différenciation de la fonction objectif

En conclusion, un système d'équations de sensibilités discrètes a été développé sur la base des équations de Navier-Stokes discrétisées par l'approche de CVFEM couplé présentées au chapitre précédent [2]. Les paramètres de différenciation pour la dérivation de ces équations de sensibilité sont les positions des points de contrôle de la représentation géométrique de profil par NUBS présentée au chapitre 3. Par l'application de la technique des récurrences simplifiées, la structure matricielle des équations discrétisées de Navier-Stokes a été préservée dans le système d'équations de sensibilités rendant ainsi la procédure de solution numérique de ces équations très similaire à celle employée pour l'écoulement. Ce résultat permet d'améliorer de manière substantielle l'efficacité de la procédure de calcul des sensibilités. A travers l'étude de cas tests, les conclusions suivantes ont été tirées quant à la validité, la précision et la performance de la méthode de sensibilité proposée :

- pour obtenir des résultats significatifs, le calcul des sensibilités doit comprendre une stratégie de déplacement du maillage;

- les hypothèses simplificatrices liées à l’application des récurrences simplifiées sont valides lorsque les résidus des équations de Navier-Stokes et des équations de sensibilités sont inférieurs à  $10^{-6}$ ;
- quels que soient les paramètres considérés, l’écart entre les valeurs des dérivées obtenues par différences finies et celles provenant du calcul des équations de sensibilités est inférieur à 1%;
- par rapport aux différences finies, l’usage des sensibilités pour le calcul des dérivées divise les temps de calcul par un facteur de 9.67.

Ces conclusions ne tiennent que dans le contexte de conditions proches de celles rencontrées dans les cas tests étudiés. Le chapitre suivant des résultats généraux fait la démonstration de la viabilité et de l’efficacité de la méthode de sensibilité proposée dans le contexte d’optimisation aérodynamique basée sur le gradient.

## 5.2 Méthode d’optimisation basée sur le gradient

Les méthodes d’optimisation basées sur le gradient exploitent le fait que la technique la plus efficace pour la recherche d’un extremum d’une fonction  $\mathcal{F}(x_c)$  consiste à se déplacer dans la direction du gradient de cette fonction. Hormis l’effort supplémentaire associé au calcul du gradient de la fonction, ces méthodes sont en général plus efficaces que les méthodes directes (voir section 2.2.4.2) puisqu’elles nécessitent un nombre inférieur d’itérations pour converger. Les méthodes basées sur le gradient suivent un processus itératif par lequel une solution  $x_c^k$  est transformée en une autre  $x_c^{k+1}$  par un déplacement suivant une certaine direction. D’un point de vue général ce processus peut être représenté par la relation suivante :

$$x_c^{k+1} = x_c^k + \lambda^k d^k \quad (5.8)$$

où  $d^k$  est la direction de recherche et  $\lambda^k$  représente la dimension du pas de déplacement. L’exposant entier  $k$  fait référence au numéro de l’itération. La méthode par laquelle  $d^k$  et  $\lambda^k$  sont spécifiés distingue entre elles les différentes méthodes d’optimisation. La direction

de recherche la plus simple pour une minimisation consiste en l'opposé du gradient. La méthode ainsi constituée s'appelle méthode de descente de gradient et l'équation (5.8) prend alors la forme :

$$x_c^{k+1} = x_c^k - \lambda^k \nabla \mathcal{F}(x_c^k) \quad (5.9)$$

Cette méthode est assez peu utilisée de par sa lenteur à converger lorsque la grandeur du gradient est faible, condition rencontrée à l'approche du minimum de la fonction. Un remède à cette faiblesse consiste à utiliser l'information de la courbure de la fonction donnée par sa dérivée seconde. Ainsi, la dérivée seconde ou Hessian de la fonction  $\mathcal{F}(x_c^k)$  notée  $H$  est combinée à son gradient pour donner la direction de recherche dont la récurrence associée est donnée par :

$$x_c^{k+1} = x_c^k - \lambda^k (H^{-1})^k \nabla \mathcal{F}(x_c^k) \quad (5.10)$$

La méthode correspondant à l'équation (5.10) est appelé méthode d'optimisation de Newton-Raphson. Tel que présenté à la section précédente, pour le problème de l'optimisation aérodynamique, l'obtention du gradient de  $\mathcal{F}$  nécessite un effort de calcul substantiel. Le calcul supplémentaire du Hessian viendrait alourdir l'algorithme global d'optimisation aérodynamique jusqu'à un niveau pouvant compromettre son application pratique. Une alternative plus économique à la méthode de Newton consiste à utiliser l'information contenue dans l'historique des itérations précédentes afin de construire une approximation du Hessian; cette approche constitue la famille des méthodes de quasi-Newton. Une des méthodes les plus utilisées de cette classe est la méthode DFP (Davidson-Fletcher-Powell) initialement développée par Davidson [21] puis modifiée par Fletcher et Powell [28]. C'est cette méthode qui a été retenue pour ce travail de par sa popularité et pour ces performances prévisibles. La méthode DFP approxime l'inverse du Hessian par

$$V^k \approx (H^{-1})^k \quad (5.11)$$

où  $V^{k+1}$  est donné par la récurrence :

$$V^{k+1} = V^k - \frac{V^k \Delta g^k (\Delta g^k)^T (V^k)^T}{(\Delta g^k)^T V^k \Delta g^k} + \frac{\Delta x_c^k (\Delta x_c^k)^T}{(\Delta x_c^k)^T \Delta g^k} \quad (5.12)$$

avec  $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$  et  $\Delta g^k = \nabla \mathcal{F}^{k+1} - \nabla \mathcal{F}^k$ . Par l'usage de l'approximation DFP du Hessian, l'équation (5.8) de récurrence de la solution est transformée en :

$$x_c^{k+1} = x_c^k - \lambda^k V^k \nabla \mathcal{F}(x_c^k) \quad (5.13)$$

Une fois la direction de recherche  $d^k$  définie, la détermination du pas de déplacement  $\lambda^k$  qui minimise  $\mathcal{F}(x_c)$  constitue une optimisation à une variable. Plusieurs techniques de recherche existent pour la solution de ce type de problème [9]. Dans le présent travail, la méthode par interpolation quadratique de Powell [75] est utilisée. Cette méthode consiste à approximer la fonction  $\mathcal{F}(x_c + \lambda d)$  à minimiser par un polynôme quadratique de la forme  $Q(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2$  en utilisant trois valeurs de  $\lambda$ . Puis la valeur  $\lambda^*$  qui minimise  $Q(\lambda)$  remplace une des trois valeurs précédentes. Ce processus est répété jusqu'à l'obtention d'une certaine précision en  $\lambda$  ou en  $\mathcal{F}(x_c + \lambda d)$ . L'algorithme d'optimisation DFP peut être synthétisé en la séquence d'opérations suivantes :

1. initialiser la solution  $x_c^0$ . Fixer  $k = 0$  et  $V^k = I$ ;
2. calculer la fonction  $\mathcal{F}(x_c^k)$  et son gradient. Si la norme du gradient,  $\|\nabla \mathcal{F}(x_c^k)\|$ , est inférieure à une tolérance prescrite arrêter sinon poursuivre vers l'opération 3;
3. réaliser l'optimisation à une variable par interpolation quadratique pour trouver  $\lambda^k$  dans la direction de recherche  $d^k = -V^k \nabla \mathcal{F}(x_c^k)$ ;
4. mettre à jour  $x_c^{k+1}$  par l'équation (5.8). Évaluer la fonction  $\mathcal{F}(x_c^{k+1})$  et son gradient. Calculer la variation du gradient  $\Delta g^k = \nabla \mathcal{F}^{k+1} - \nabla \mathcal{F}^k$ ;
5. mettre à jour  $V^{k+1}$  par l'équation (5.12);
6. incrémenter  $k = k + 1$  et retourner à l'étape 2.

L'algorithme DFP combiné à la recherche par interpolation quadratique constitue une méthode d'optimisation efficace et robuste.



## CHAPITRE 6

### RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Après avoir successivement démontré la validité de la représentation géométrique de profil par NUBS au chapitre 3, la précision et l'efficacité de la méthode numérique de CVFEM couplé pour le calcul de l'écoulement au chapitre 4 et celles de la méthode de calcul des sensibilités par la technique des récurrences simplifiées au chapitre 5, le présent chapitre fait la synthèse de ces trois constituantes à travers la solution de quatre problèmes d'optimisation aérodynamique. Les quatre cas tests d'optimisation aérodynamique présentés dans ce chapitre représente un éventail relativement large des problèmes rencontrés dans la pratique. Ainsi, ces cas tests regroupent des problèmes de type ouvert et fermé, faisant intervenir un nombre élevé de paramètres de conception et des fonctions objectifs basées sur les variables de l'écoulement et sur les coefficients de performance aérodynamique. Tous les problèmes abordés convergent vers une solution, seul le problème ouvert nécessite l'ajout de contraintes d'épaisseur sur le profil afin de produire des résultats géométriquement réalistes. Toutefois, en l'absence de turbulence, les nombres de Reynolds traités sont limités à 100 de part le constat de difficultés à converger pour des valeurs supérieures. Des investigations supplémentaires seraient nécessaires afin de clarifier cette problématique mais ce travail sort du cadre de la présente recherche et est reporté à des travaux ultérieurs.

#### 6.1 Exemple de design inverse à 2 variables sur un profil NACA 63013 représenté par une NUBS à 12 points de contrôle

Le premier cas test d'optimisation aérodynamique abordé consiste en un problème de design inverse appliqué à l'approximation d'un profil NACA 63013 [1] placé à un angle d'attaque de  $\alpha = 5^\circ$  et représenté par une NUBS à 12 points de contrôle. Plus précisément, la géométrie de la représentation originale du profil NACA 63013 est déformée en perturbant l'abscisse et l'ordonnée du point de contrôle 4 de la NUBS,  $x_c^*(4)$  et  $y_c^*(4)$

respectivement :

$$\begin{aligned} x_c^0(4) &= x_c^*(4) - 4.5 \cdot 10^{-2} \text{ avec } x_c^*(4) = 0.44577 \\ y_c^0(4) &= y_c^*(4) - 7.1 \cdot 10^{-2} \text{ avec } y_c^*(4) = 0.12698 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Où l'exposant \* fait référence aux valeurs originales cibles non perturbées de la position

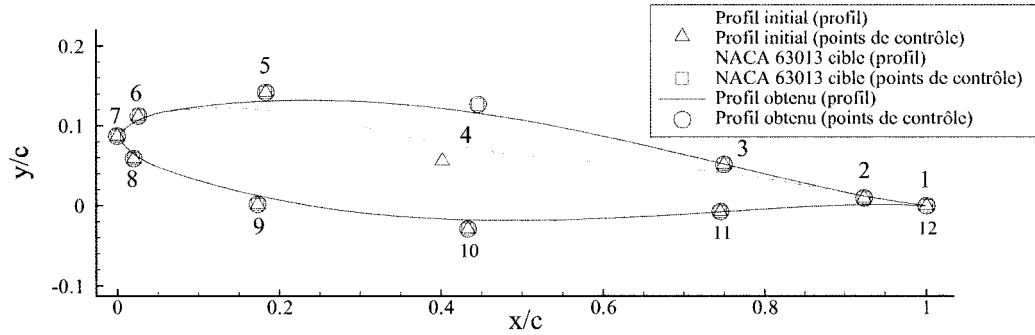


Figure 35 Profils NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 12 points de contrôle, optimisation aérodynamique à deux variables,  $(x_c(4), y_c(4))$

du point de contrôle 4, alors que l'exposant  $^0$  réfère aux valeurs initiales de la position du point de contrôle 4 à l'itération 0 de la procédure d'optimisation. Le profil déformé ainsi obtenu constitue le design initial de l'optimisation alors que la géométrie non-perturbée représente le profil cible à atteindre tel que présenté à la figure 35. Le déplacement du point de contrôle 4 de la NUBS de  $(x_c^*(4), y_c^*(4))$  à  $(x_c^0(4), y_c^0(4))$  crée une indentation sur une fraction de l'extrados du profil par rapport au profil original. Deux fonctions objectifs ont successivement été utilisées pour diriger l'optimisation. La première fonction objectif correspond au problème de design inverse en pression définie par la forme discrète suivante :

$$\mathcal{F}_p(x_c(4), y_c(4)) = \sum_{j=1}^k (p_j - p_j^*)^2 \quad (6.2)$$

où  $p_j^*$  représente la distribution de pression cible à atteindre correspondant au profil NACA 63013 non perturbé et  $k$  ( $k = 160$ ) dénote le nombre de points discrets décrivant la géométrie du profil. En minimisant  $\mathcal{F}_p$  (équation (6.2)), le processus d'optimisation doit aboutir à la forme de profil dont la distribution de pression est la plus proche de la distribution de pression cible au sens des moindres carrés. La seconde fonction objectif considérée est directement basée sur les coefficients de performance aérodynamique :

$$\mathcal{F}_{C_L, C_D}(x_c(4), y_c(4)) = (C_L - C_L^*)^2 + (C_D - C_D^*)^2 \quad (6.3)$$

où  $C_L^*$  et  $C_D^*$  sont respectivement les coefficients de portance et de traînée cible à atteindre définis par  $C_L^* = \frac{L^*}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}$  et  $C_D^* = \frac{D^*}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c}$ . Une optimisation aérodynamique minimisant la fonction objectif  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  (équation (6.3)) converge vers une forme de profil dont les coefficients de performance  $C_L$  et  $C_D$  sont les plus proches des coefficients de performance cibles au sens des moindres carrés. Les optimisations présentées dans cette section ont été réalisées pour un nombre de Reynolds de 40, sur des maillages en C constitués de  $246 \times 57$  noeuds dont 160 représentent la surface du profil. Les optimisations aérodynamiques considérées possèdent deux variables de conception,  $x_c(4)$  et  $y_c(4)$ , qui correspondent aux deux dimensions de l'espace plan de recherche. La figure 36 présente les isocontours de la fonction objectif basée sur la pression,  $\mathcal{F}_p$ , dans le voisinage des points  $(x_c^*(4), y_c^*(4))$  et  $(x_c^0(4), y_c^0(4))$ . Sur le domaine d'intérêt de l'espace de recherche présenté à la figure 36, la fonction objectif,  $\mathcal{F}_p$ , est parfaitement convexe et ne possède par conséquent qu'un minimum à la fois local et global en  $(0,0)$ . Cette propriété de la fonction objectif rend le problème particulièrement propice à une résolution par une optimisation basée sur le gradient telle que celle projetée. Ainsi, la procédure d'optimisation proposée basée sur l'algorithme DFP [21,28] et les sensibilités nécessitent 8 itérations globales pour minimiser la fonction objectif à une valeur inférieure à,  $\mathcal{F}_p \leq 4.65 \cdot 10^{-15}$ . A ce niveau de convergence, à l'échelle de la figure 35 aucune différence n'est visuellement perceptible entre la géométrie du profil final obtenue par optimisation et celle du profil cible. Une

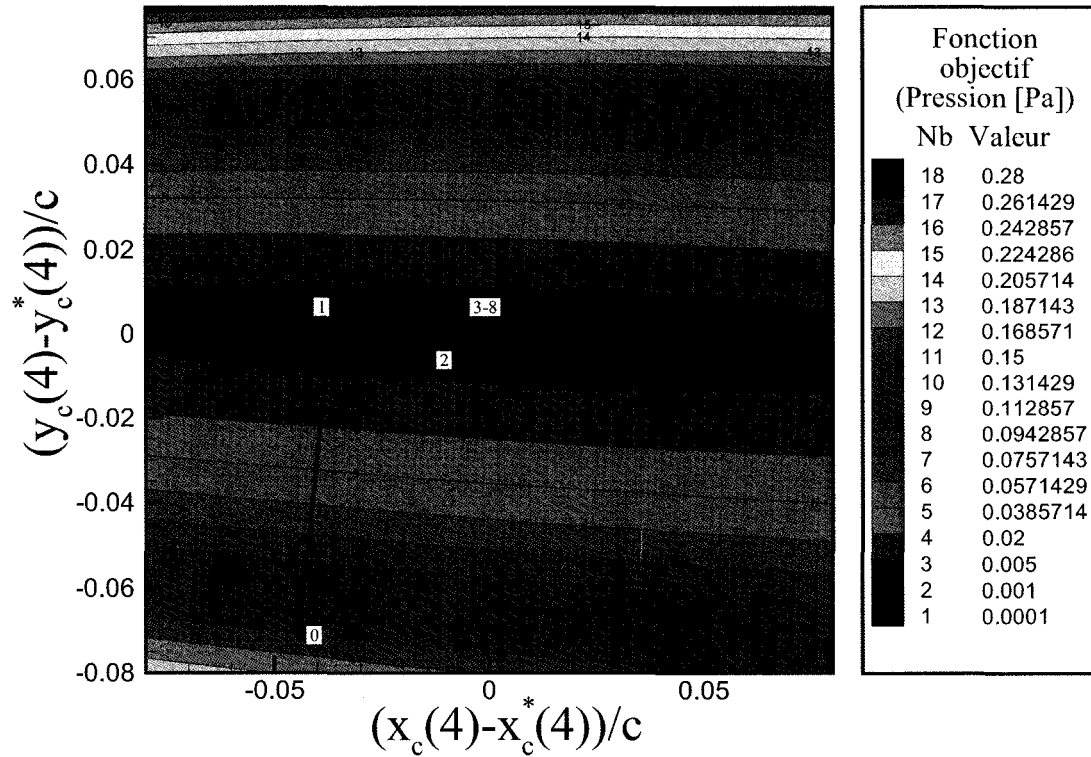


Figure 36 Isocontour de la fonction objectif basée sur la pression,  $\mathcal{F}_p$ , dans l'espace de solution  $(x_c(4), y_c(4))$ , NACA 63013,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re=40$

conclusion similaire peut être tirée quant à la distribution de coefficients de pression à la surface du profil cible et du profil obtenu tel que présenté à la figure 37.

Le trajet suivi par la solution lors de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p$  a été reporté sur la figure 36. Les points  $(x_c^n(4), y_c^n(4))$  correspondant à la solution de l'optimisation à une itération  $n$  sont numérotés de  $\boxed{0}$  à  $\boxed{8}$  et joints entre eux par des lignes continues. La première direction de recherche correspondant au segment joignant le point initial  $\boxed{0}$  au point  $\boxed{1}$  semble bien correspondre à l'opposé du gradient (évalué au point  $\boxed{0}$ ) puisque normale aux courbes d'isocontours autour de  $\boxed{0}$ . Ceci conforte les conclusions énoncées au chapitre 3 quant à

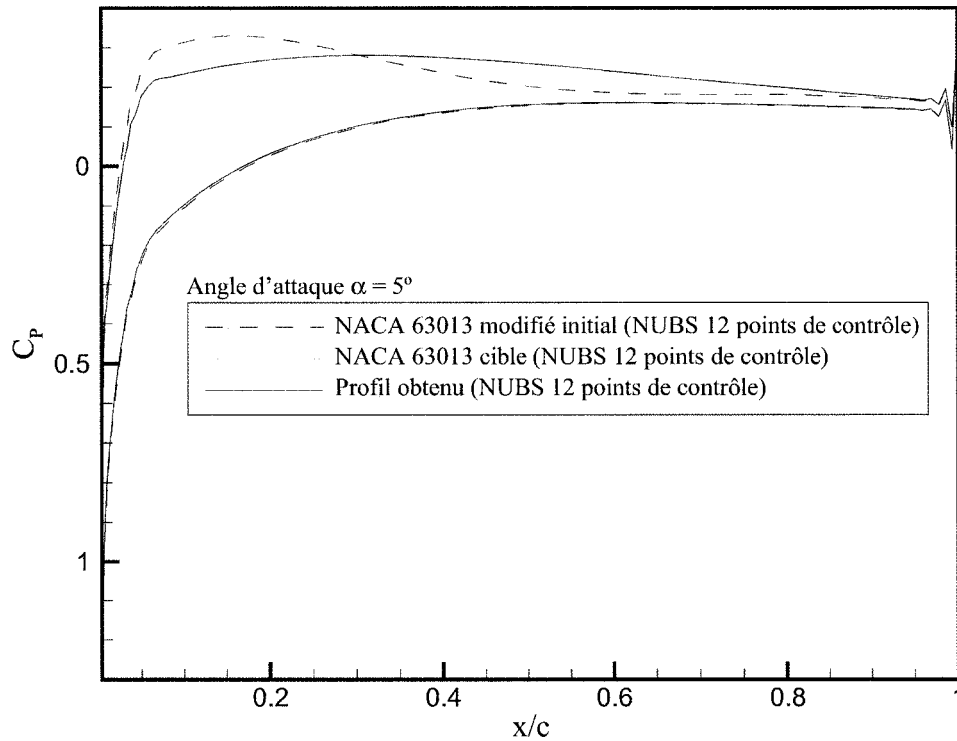


Figure 37 Coefficient de pression, optimisation du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 12 points de contrôle

la précision du gradient de  $\mathcal{F}_p$  obtenu par la méthode proposée des sensibilités par récurrences simplifiées. De par la nature convexe de la fonction, l'algorithme d'optimisation DFP converge rapidement vers la solution exacte du problème. La figure 38 retrace l'historique de convergence de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p(x_c^n(4), y_c^n(4))$ . La convergence monotone de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p$  semble suivre un comportement de type  $10^{-1.8n}$ . Le processus global d'optimisation a nécessité 65 calculs de l'écoulement et 8 évaluations d'un gradient à deux dimensions pour une durée totale de 6.4 heures de calcul tel qu'obtenu sur un micro ordinateur basé sur un processeur Intel Pentium IV cadencé à 2.8 GHz et opérant

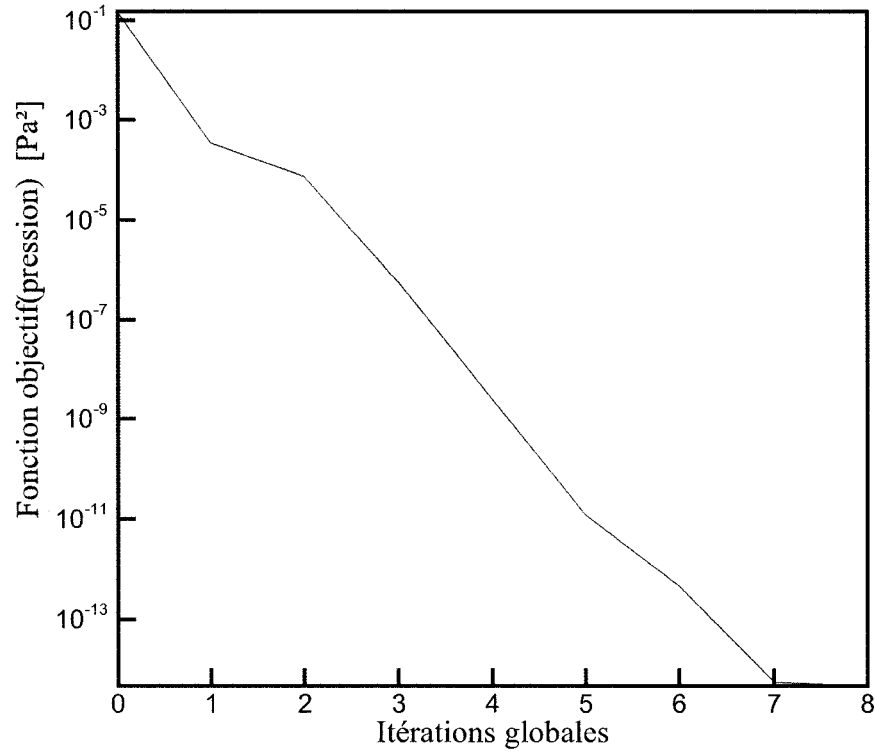


Figure 38 Historique de convergence de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p(x_c^n(4), y_c^n(4))$  sur le profil NACA 63013,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\text{Re}=40$

le système d'exploitation Linux Red Hat noyau 2.4.20-13.9 et le compilateur Gnu fortran v3.2.2.. Par projection, une optimisation similaire mais faisant usage des différences finies pour l'obtention du gradient aurait nécessité 7.8 heures de calcul. Cette modeste réduction du temps de calcul (21.8%) liée à l'usage des sensibilités est attribuable à la simplicité du problème qui ne comporte que deux variables de conception et représente plus un cas test de validation qu'un problème d'optimisation pratique.

Suite à l'étude du problème de design inverse basé sur la fonction objectif liée à la pression,  $\mathcal{F}_p$  (équation (6.2)), il est d'intérêt de comparer les résultats obtenus à ceux prove-

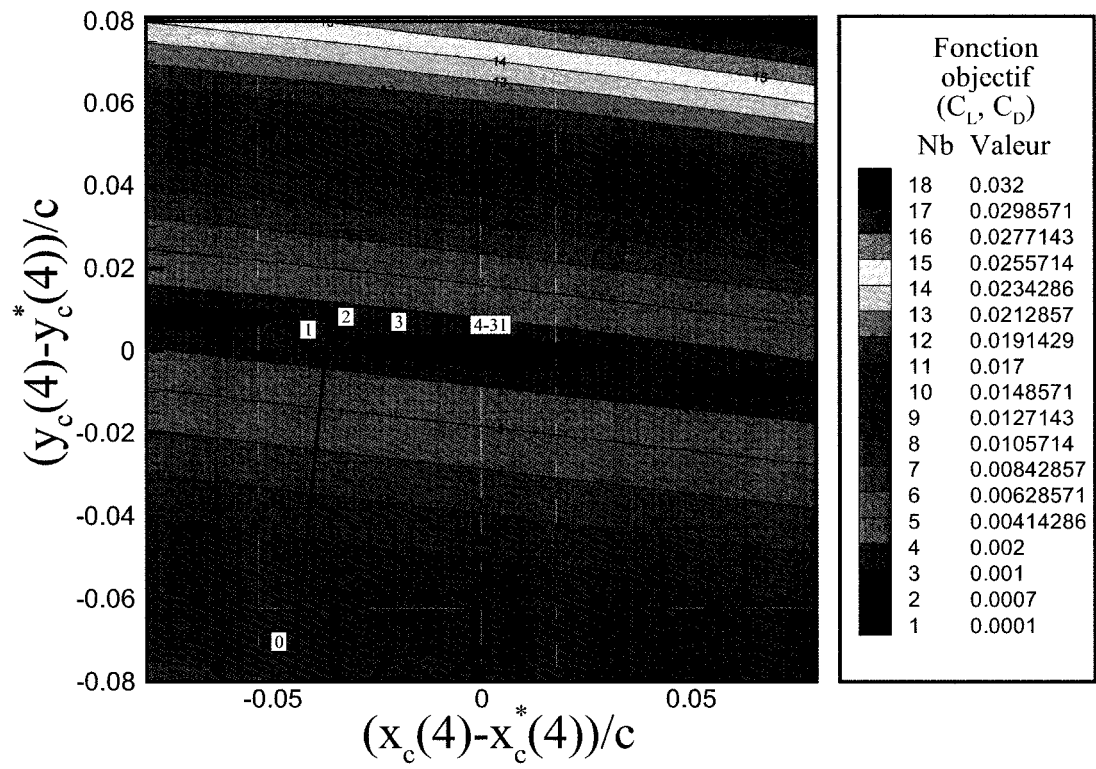


Figure 39 Isocontour de la fonction objectif basée sur  $C_L$  et  $C_D$ ,  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ , dans l'espace de solution  $(x_c(4), y_c(4))$ , NACA 63013,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re=40$

nant du problème similaire établi à partir de la fonction objectif  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  (équation (6.3)) basée sur les coefficients de performances aérodynamiques. Les Iso-contours de la fonction objectif  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  ont été tracés au voisinage de  $(x_c^*(4), y_c^*(4))$  et  $(x_c^0(4), y_c^0(4))$  tels que présentés à la figure 39. Contrairement à  $\mathcal{F}_p$  (voir figure 36), sur le domaine de recherche présenté à la figure 39, la fonction objectif  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  n'est pas convexe et comporte trois minima : deux minima locaux et un minimum global. Ces différences entre les deux représentations du même problème géométrique proviennent des niveaux d'informations contenus dans les fonctions objectifs  $\mathcal{F}_p$  et  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ . La fonction  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  (équation (6.3)) basée sur une formulation intégrale est moins discriminante que  $\mathcal{F}_p$  (équation (6.2)) établie à partir d'une formulation discrète. Par conséquent, le problème d'optimisation construit sur  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  devrait nécessiter un effort de calcul plus important que celui faisant intervenir  $\mathcal{F}_p$ . La minimisation de la fonction objectif  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  à une valeur inférieure à,  $\mathcal{F}_{C_L, C_D} \leq 5.28 \cdot 10^{-13}$ , a nécessité 31 itérations globales de la procédure d'optimisation proposée. Tout comme pour l'optimisation en pression, à ce niveau de convergence, aucune différence n'est perceptible entre la solution obtenue et l'objectif aussi bien en terme de géométrie qu'au niveau de la distribution de pression autour du profil (voir figures 35 et 37). L'historique de convergence de  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ , présenté à la figure 40, révèle que la convergence de la fonction objectif semble suivre un comportement du type  $10^{-0.25n}$ . Toutefois, ce résultat ne peut être comparé à celui obtenu pour l'optimisation en pression car il n'existe pas de corrélation directe entre les valeurs des fonctions  $\mathcal{F}_p$  et  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ . Une analyse plus significative de la convergence des deux optimisations peut être obtenue par la comparaison des trajets suivis par la solution dans l'espace de recherche. Ainsi, par rapport à l'optimisation en pression (voir figure 36), graphiquement, lors de l'optimisation de  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ , la solution semble se rapprocher du minimum à une vitesse spatiale par itération comparable tel que présenté à la figure 39. Bien que ce résultat permette de comparer les deux optimisations sans égard aux valeurs des fonctions objectifs, néanmoins, il ne donne pas d'information quant aux efforts de calcul investis puisque chaque itération globale du processus d'optimisation requiert un nombre variable de solutions de l'écoulement. La fi-



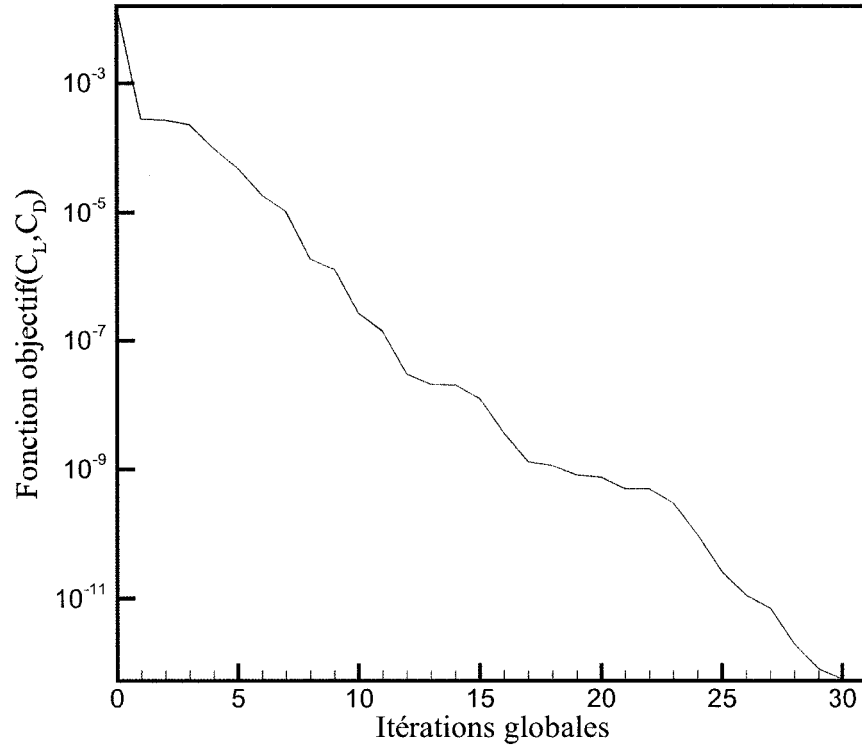


Figure 40 Historique de convergence de l'optimisation de  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}(x_c^n(4), y_c^n(4))$  sur le profil NACA 63013,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $\text{Re}=40$

Figure 41 trace la distance spatiale entre la solution des optimisations et la solution exacte, i.e.  $\sqrt{(x_c^n(4) - x_c^*(4))^2 + (y_c^n(4) - y_c^*(4))^2}$ , en fonction du nombre de calculs de l'écoulement et du gradient. Ce graphique constitue un plan de comparaison neutre entre les deux optimisations. Seule l'optimisation en pression voit la distance spatiale entre sa solution et la solution exacte diminuer de manière monotone. Ce résultat provient encore une fois du fait que la fonction objectif  $\mathcal{F}_p$  est plus discriminante que  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ , surtout au voisinage de la solution exacte, ce qui se traduit par la forme plus évasée et plate de  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ . Pour un niveau donné de précision spatiale, l'optimisation basée sur les coefficients aérodynamiques

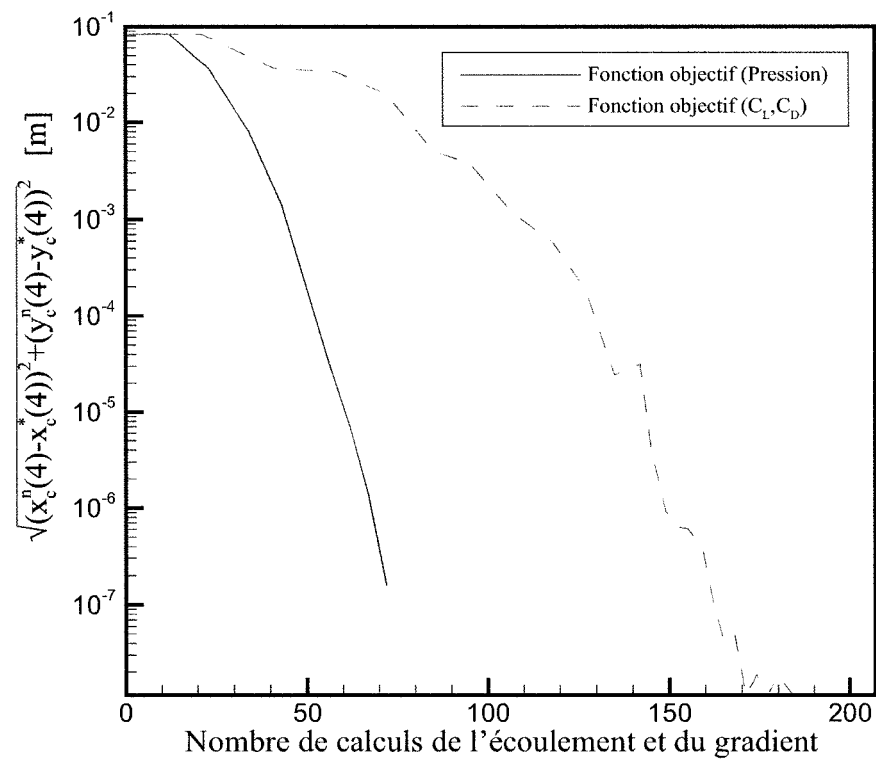


Figure 41 Évolution de la distance spatiale entre la solution des optimisations et la solution exacte en fonction du nombre de calculs de l'écoulement et du gradient, optimisation profil NACA 63013,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re=40$

de performance nécessite environ un effort de calcul double par rapport à celle établie sur la pression. Globalement, l'optimisation de  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  requiert 176 solutions de l'écoulement et 31 évaluations d'un gradient à deux composantes pour un temps de calcul total de 17.2 heures. Par projection, une optimisation similaire faisant usage de différences finies pour l'évaluation du gradient aurait nécessité 22.8 heures de calcul soit un accroissement de 32.6%. La proportion plus importante du calcul du gradient par rapport à la charge de calcul totale (i.e. calcul de l'écoulement + calcul du gradient) de l'optimisation de  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  explique ce gain d'efficacité de calcul supérieur à celui obtenu pour  $\mathcal{F}_p$ .

À travers l'étude des problèmes d'optimisation de  $\mathcal{F}_p$  et  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  autour du profil NACA 63013 présentés dans cette section, la validité de la procédure globale d'optimisation proposée a été démontrée pour des espaces de recherche à deux dimensions. La méthode proposée basée sur un calcul de sensibilités par la technique des récurrences simplifiées et l'algorithme DFP a prouvé sa capacité à converger rapidement vers la solution exacte des problèmes établis aussi bien sur une fonction objectif discrète ( $\mathcal{F}_p$ , équation (6.2)) que sur une fonction objectif intégrale construite à partir des coefficients de performances aérodynamiques ( $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$ , équation (6.3)). Les deux cas tests présentés ont également permis d'entrevoir la capacité de la méthode proposée à réduire les temps de calcul totaux par rapport à une approche faisant usage des différences finies pour le calcul du gradient. Le problème présenté à la section suivante aura pour objectif d'élargir le champ d'application de la procédure d'optimisation proposée à des espaces de plus grandes dimensions afin d'en exprimer le plein potentiel d'efficacité de calcul par rapport aux différences finies.

## 6.2 Exemple de design inverse à 18 variables entre des profils NACA 63315 et NACA 63013 représentés par des NUBS à 11 points de contrôle

Le second exemple d'optimisation aérodynamique abordé consiste en un problème de design inverse basé sur la pression. La distribution de pression initiale correspond à un profil NACA 63315 [1] représenté par une NUBS possédant 11 points de contrôle et placé à angle d'attaque de  $\alpha = 0^\circ$  dans un écoulement au nombre de Reynolds de  $Re = 40$ .

La distribution de pression cible de l'optimisation correspond quant à elle à une représentation de profil NACA 63013 [1] dans les mêmes conditions d'opération. La figure

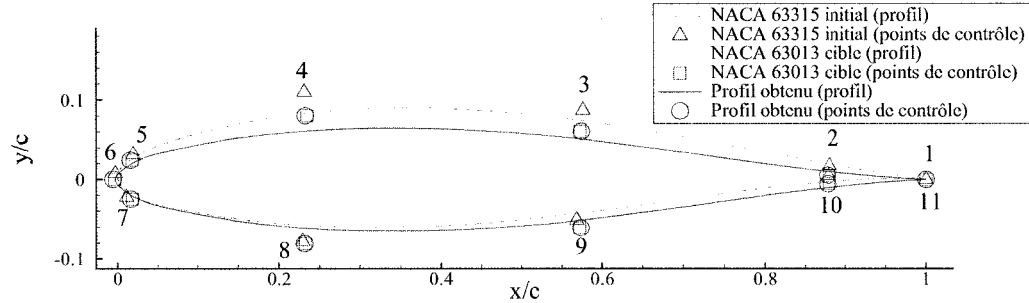


Figure 42 Profils NACA-63313 et NACA-63013 ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle, optimisation aérodynamique à 18 variables

42 présente la géométrie du profil initial et du profil cible de l'optimisation, soit les approximations des profils NACA 63315 et NACA 63013 respectivement. Les géométries des profils sont approximées par des NUBS à 11 points de contrôle dont les positions de 9 d'entre eux servent de variables de conception lors de l'optimisation. Seules les positions du premier et du dernier point de contrôle, confondus au bord de fuite, sont fixées. Ainsi, l'abscisse et l'ordonnée des 9 points de contrôle libres (points de contrôle 2 à 10 voir figure 42) constituent les 18 variables de conception de l'optimisation. La fonction objectif  $\mathcal{F}_p(x_c(2, 3, \dots, 10), y_c(2, 3, \dots, 10))$  définie par l'équation (6.2) est utilisée pour diriger l'optimisation. Les solutions numériques de l'écoulement et des sensibilités sont obtenues sur des maillages en C constitués de  $246 \times 57$  noeuds dont 160 représentent la surface du profil. La figure 43 présente les distributions de coefficients de pression autour du profil initial et du profil cible de l'optimisation. Contrairement à la distribution de coefficients de pression initiale, la distribution de coefficients de pression cible est identique sur l'extrados et l'intrados puisqu'elle correspond à un profil symétrique (profil NACA 63013 voir figure 42) à angle d'attaque nul. L'optimisation par la procédure proposée a nécessité 134

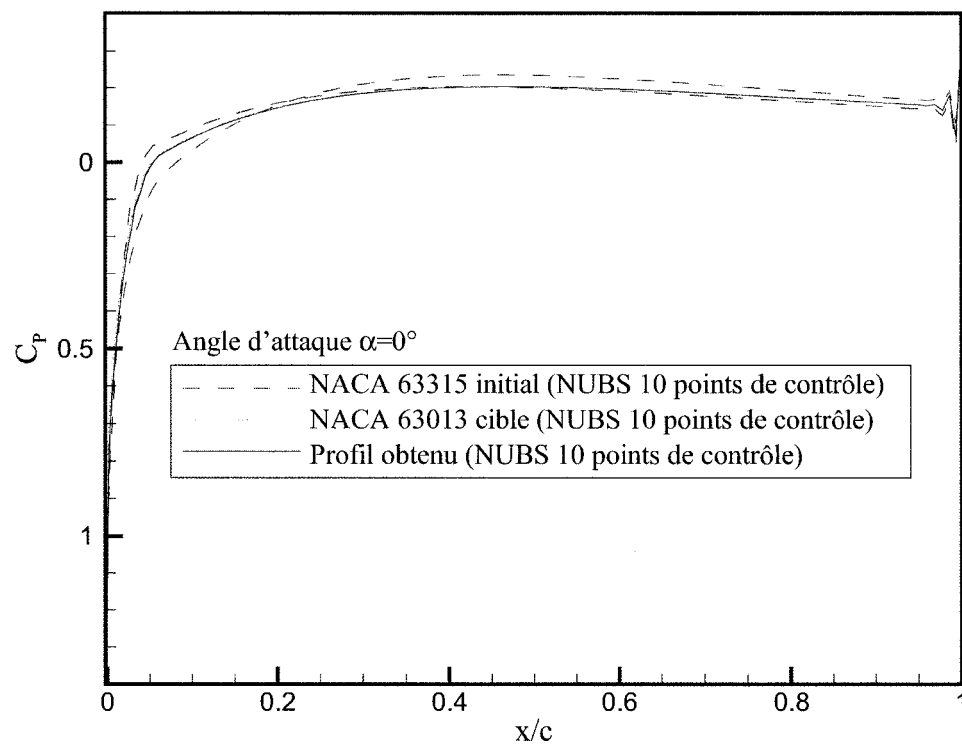


Figure 43 Coefficient de pression, problème de design inverse, profils NACA-63315 et NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle

Tableau XI

Comparaisons entre les valeurs initiales, cibles et obtenues des variables de conception, problème de design inverse à 18 variables, profils NACA-63315 et NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle

Variables de conception [m]	Valeurs initiales	Valeurs obtenues	Valeurs cibles
$x_c(2)$	8.800E-1	8.780E-1	8.798E-1
$x_c(3)$	5.763E-1	5.745E-1	5.729E-1
$x_c(4)$	2.314E-1	2.324E-1	2.344E-1
$x_c(5)$	1.983E-2	1.598E-2	1.797E-2
$x_c(6)$	-2.410E-3	-5.365E-3	-3.394E-3
$x_c(7)$	1.124E-2	1.634E-2	1.829E-2
$x_c(8)$	2.292E-1	2.313E-1	2.324E-1
$x_c(9)$	5.685E-1	5.737E-1	5.724E-1
$x_c(10)$	8.791E-1	8.782E-1	8.799E-1
$y_c(2)$	1.729E-2	5.592E-3	5.443E-3
$y_c(3)$	8.716E-2	6.081E-2	6.067E-2
$y_c(4)$	1.099E-1	8.052E-2	8.034E-2
$y_c(5)$	3.190E-2	2.480E-2	2.470E-2
$y_c(6)$	7.583E-3	4.135E-4	2.892E-4
$y_c(7)$	-2.220E-2	-2.454E-2	-2.466E-2
$y_c(8)$	-7.789E-2	-8.071E-2	-8.056E-2
$y_c(9)$	-5.070E-2	-6.058E-2	-6.070E-2
$y_c(10)$	5.165E-3	-5.589E-3	-5.458E-3

itérations pour minimiser la fonction objectif à une valeur,  $\mathcal{F}_p \leq 2.62 \cdot 10^{-6}$ . La figure 44 retrace l'historique de convergence de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p$ . La convergence monotone de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p$  stagne à partir de 105 itérations à une valeur plateau proche de la valeur pleinement convergée. L'impossibilité de réduire la valeur de  $\mathcal{F}_p$  en dessous de  $2.62 \cdot 10^{-6}$  signale la présence d'un minimum local puisque la convergence vers la solution exacte du problème correspondant au minimum global de la fonction objectif devrait permettre de tendre vers une valeur proche du zéro machine tel qu'observé au problème précédent. La convergence de l'optimisation vers un minimum local est confirmée par la

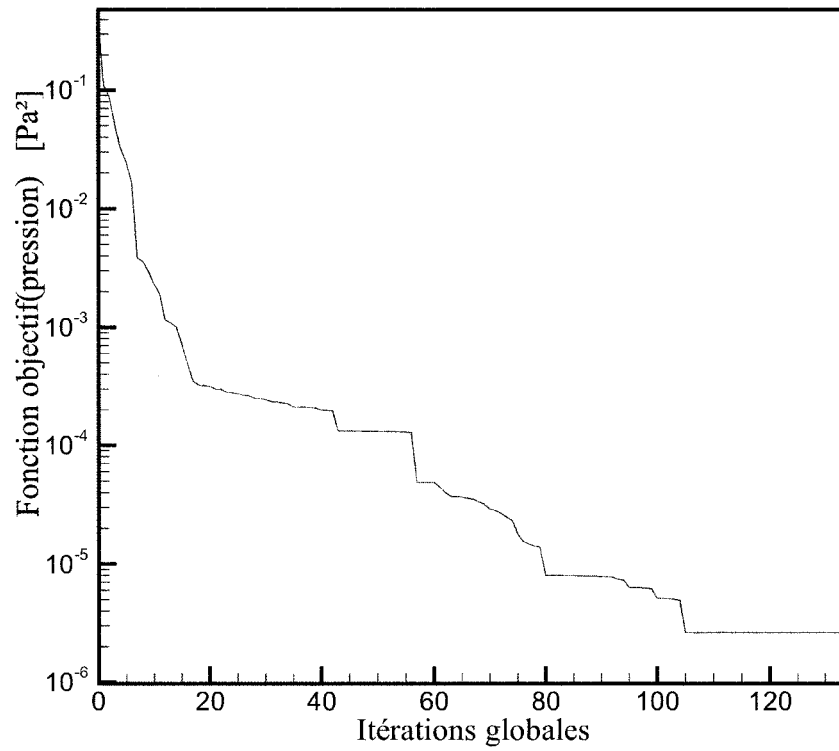


Figure 44 Historique de convergence de l'optimisation de  $\mathcal{F}_p$ , problème de design inverse à 18 variables, profils NACA-63315 et NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 11 points de contrôle

comparaison des valeurs des variables de conception obtenues par optimisation aux valeurs cibles telles que présentées au Tableau XI. On constate que les valeurs convergées obtenues des variables de conception sont relativement éloignées des valeurs cibles correspondant à la solution exacte. La présence d'un minimum local peut être attribuée à la nature même de la fonction objectif comme pour le cas précédent de la fonction objectif  $\mathcal{F}_{C_L, C_D}$  (voir section 6.1). Ainsi, pour une telle fonction objectif établie sur une formulation intégrale (voir équation (6.3)), il est concevable que deux profils aux géométries différentes possèdent des valeurs de coefficients aérodynamiques relativement proches. Une explication similaire est physiquement moins envisageable pour le cas de la fonction  $\mathcal{F}_p$  (voir équation (6.2)) calculée à partir de la distribution de pression discrète sur le profil. La présence d'un minimum local dans le présent problème d'optimisation aérodynamique est plutôt imputable à la représentation géométrique de profils utilisée. La figure 42 démontre qu'à l'échelle de ce graphique, il est difficile de distinguer la géométrie du profil cible de celle du profil obtenu suite à l'optimisation alors qu'on y observe des différences quant à la position des points de contrôle. D'après la formulation mathématique des NUBS (voir section 3.1.1), une variation de la position des points de contrôle entraîne une déviation d'ordre égale de la position des points de la courbe NUBS. Ainsi, il apparaît que pour deux distributions différentes de points de contrôle (voir Tableau XI), la représentation de profil par NUBS proposée produit des géométries de profils très proches. Cette caractéristique peut représenter une faiblesse de la représentation géométrique de profil par NUBS, faiblesse déjà évoquée à la section 2.2.1. La non-bijectivité de la représentation géométrique de profil proposée entraîne une auto-superposition inutile de l'espace de recherche sur lui même qui peut aboutir au mauvais conditionnement du problème d'optimisation. Des expériences supplémentaires sont toutefois nécessaires avant de statuer de manière définitive sur la viabilité de représentation de profil par NUBS proposée. Le processus global d'optimisation a nécessité 651 calculs de l'écoulement et 134 évaluations d'un gradient à 18 dimensions pour une durée totale de 86.7 heures de calcul tel qu'obtenu sur un micro ordinateur basé sur un processeur Intel Pentium IV cadencé à 2.8 GHz



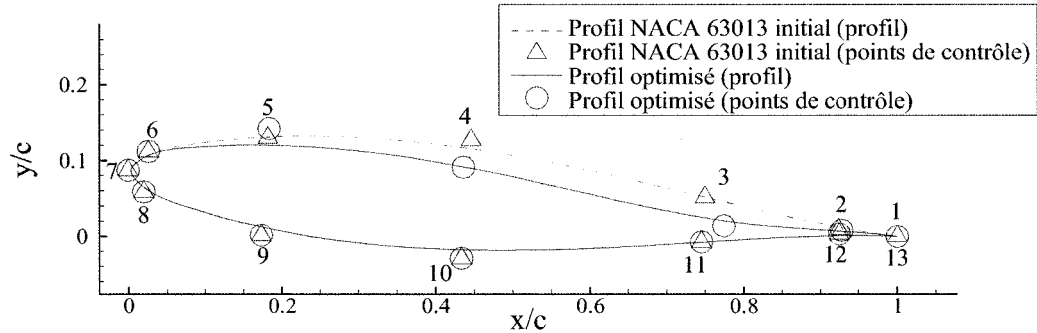


Figure 45 Profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximé par une NUBS possédant 13 points de contrôle, optimisation de la finesse à 8 variables

et opérant le système d'exploitation Linux Red Hat noyau 2.4.20-13.9 et le compilateur Gnu fortran v3.2.2.. Par projection, une optimisation similaire mais faisant usage des différences finies pour l'obtention du gradient aurait nécessité 293.6 heures de calcul. La méthode proposée d'évaluation des sensibilités par la technique des récurrences simplifiées a permis de diviser le temps de calcul global de l'optimisation par un facteur de 3.4 par rapport aux différences finies. Le présent cas test démontre clairement l'efficacité de la méthode proposée pour la solution de problèmes d'optimisation présentant un nombre élevé de variables de conception. Il permet également d'identifier une des faiblesses de la représentation de profil employée relative à sa non-bijektivité.

### 6.3 Problème d'optimisation de la finesse à 8 variables sur un profil NACA 63013 approximé par une NUBS à 13 points de contrôle

Les deux problèmes précédemment étudiés sont de type fermé, i.e. la solution exacte de l'optimisation est connue d'avance. Le présent problème est ouvert et consiste en l'optimisation de la finesse d'un profil NACA 63013 [1] représenté par une NUBS possédant 13 points de contrôle et placé à un angle d'incidence de  $5^\circ$  dans un écoulement au nombre de Reynolds de  $Re = 40$ . La figure 45 présente la géométrie du profil NACA 63013 ainsi que les points de contrôle associés à sa représentation par NUBS. Ce profil constitue le point

de départ initial de l'optimisation. Les positions des points de contrôle numérotés de 2 à 5 et repérés par une abscisse et une ordonnée sont libres de se déplacer et correspondent aux 8 variables de conception de l'optimisation. Ainsi, seule la géométrie de l'extrados du profil est modifiée durant l'optimisation (voir figure 45). La fonction objectif qui régit l'optimisation est définie par l'expression suivante :

$$\mathcal{F}_{C_D/C_L}(x_c(2, \dots, 5), y_c(2, \dots, 5)) = \frac{C_D}{C_L} \quad (6.4)$$

La minimisation de la fonction  $\mathcal{F}_{C_D/C_L}$  devrait aboutir à un profil ayant une valeur la plus faible possible du rapport de son coefficient de traînée sur son coefficient de portance. L'obtention d'un profil ayant une finesse (i.e.  $C_L/C_D$ ) élevée correspond à un des principaux objectifs fréquemment recherchés dans de nombreuses applications pratiques aérodynamiques. Contrairement aux cas tests précédents, pour ce type d'optimisation ouverte, il est nécessaire de fixer des contraintes sur la géométrie du profil pour s'assurer d'obtenir des solutions physiquement réalistes et techniquement fonctionnelles. Ainsi, afin d'éviter l'obtention de profil infiniment mince ou géométriquement impossible, une contrainte géométrique sur l'épaisseur du profil est imposée à l'aide d'une méthode de pénalité. Malgré les faiblesses bien connues des méthodes de pénalité [9], cette stratégie est utilisée pour la simplicité de sa mise en oeuvre et parce qu'elle permet de traiter un problème d'optimisation sous contraintes avec le même algorithme qu'un problème sans contrainte. À la valeur de la fonction objectif initiale  $\mathcal{F}_{C_D/C_L}$  (équation (6.4)), est additionnée la valeur d'une fonction de contrainte en épaisseur  $\mathcal{F}_T$  (fonction de pénalité) pour obtenir une nouvelle fonction objectif pénalisée  $\tilde{\mathcal{F}}_{C_D/C_L}$  :

$$\tilde{\mathcal{F}}_{C_D/C_L} = \mathcal{F}_{C_D/C_L} + \mathcal{F}_T \quad (6.5)$$

La fonction de pénalité en épaisseur est définie par l'expression :

$$\mathcal{F}_T = \begin{cases} \omega_T \sum_{i=1}^{N_T} \left[ 1 - \frac{t(x_i)}{t^*(x_i)} \right]^2 & \text{si } t(x_i) < t^*(x_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.6)$$

où  $N_T$  correspond au nombre de contraintes d'épaisseur appliquées,  $t^*(x)$  est l'épaisseur minimale du profil à une position  $x$  et  $\omega_T$  est une constante définie par l'utilisateur en fonction du problème abordé. L'épaisseur du profil,  $t(x)$ , est définie comme la distance entre les points situés sur l'intrados et l'extrados du profil à une station  $x$  donnée et repérés par les couples  $(x_{int}, y_{int})$  et  $(x_{ext}, y_{ext})$  respectivement. Cette épaisseur peut prendre une valeur négative lorsque le point extrados possède une ordonnée inférieure au point situé sur l'intrados tel que décrit par l'expression suivante :

$$t(x_i) = \begin{cases} \sqrt{(x_{int,i} - x_{ext,i})^2 + (y_{int,i} - y_{ext,i})^2} & \text{si } y_{ext} > y_{int} \\ -\sqrt{(x_{int,i} - x_{ext,i})^2 + (y_{int,i} - y_{ext,i})^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.7)$$

Pour le présent problème, cinq contraintes d'épaisseurs,  $N_T = 5$ , ont été appliquées aux

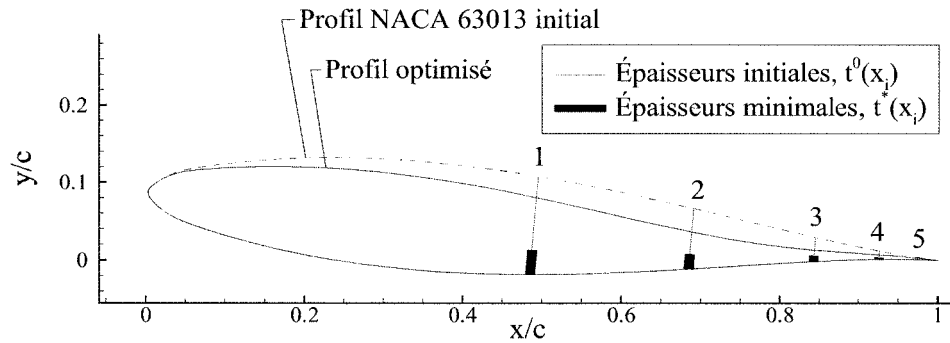


Figure 46 Coefficient de pression, optimisation de la finesse du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle

stations situées à 50%, 70%, 85%, 93%, et 98% de la longueur du profil tel que présenté

à la figure 46. Pour une station donnée, l'épaisseur minimum acceptable,  $t^*(x)$ , a été fixée à un quart de l'épaisseur du profil initial,  $t^0(x)$ , à cette même station. Pour le cas test d'intérêt, une valeur de la constante  $\omega_T = 1$  semble permettre d'imposer les contraintes d'épaisseurs de manière relativement stricte sans perturber exagérément le problème original d'optimisation. La procédure d'optimisation proposée a nécessité 15 itérations globales afin de converger pour un critère correspondant à une valeur de la norme du gradient de  $\tilde{\mathcal{F}}_{C_D/C_L}$  inférieure à  $10^{-10}$ . La figure 45 présente le profil optimisé et les points de contrôle associés à sa représentation par NUBS. Par rapport au profil initial NACA 63013, le profil optimisé est moins épais, particulièrement sur la partie aval. La seule contrainte d'épaisseur active à la fin de l'optimisation est celle correspondant à la station située à 98% du profil soit à proximité du bord de fuite (voir contrainte 5 à la figure 46). Le tableau

Tableau XII

Comparaisons entre les valeurs initiales et optimisées des coefficients aérodynamiques et fonctions objectifs, problème d'optimisation de la finesse à 8 variables, profils NACA-63013, ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle

	$C_L$	$C_{D_f}$	$C_{D_p}$	$C_D$	$\frac{C_D}{C_L}$	$\mathcal{F}_T$	$\tilde{\mathcal{F}}_{C_D/C_L}$
Profil initial	0.28549	0.53442	0.12889	0.66331	2.32339	0.0	2.32339
Profil optimisé	0.28531	0.52314	0.12649	0.64964	2.27691	7.8E-06	2.27691
Différence %	-0.063	-2.11	-1.86	-2.06	-2.00	$\frac{t(98\%)}{t^*(98\%)}$    99.7 %	-2.00
		$\frac{\Delta C_{D_f}}{C_D}$    -1.7 %	$\frac{\Delta C_{D_p}}{C_D}$    -0.36 %				

XII compare les valeurs initiales et optimisées des coefficients aérodynamiques et de la

fonction objectif. Il apparaît que suite à l'optimisation, le coefficient de traînée totale du profil a diminué de 2.06% alors que le coefficient de portance n'a perdu que 0.063%. La baisse plus importante de la traînée par rapport à celle de la portance entraîne une diminution de  $\mathcal{F}_{C_D/C_L}$  de 2% ce qui se transpose en une augmentation de la finesse de 2.04%. La diminution de 2.06% de la traînée totale provient principalement de la réduction de la traînée de friction qui en représente 1.7%. Néanmoins, en valeur relative, les deux contributions de traînée (friction et pression) subissent des réductions d'ordres comparables. L'analyse de la distribution des coefficients de pression autour des profils permet la compréhension physique des modifications des performances aérodynamiques suite à l'optimisation. Ainsi, tel que présenté à la figure 47, il apparaît que sur l'extrados du profil optimisé, la succion maximale est plus élevée et sa position est située plus près du bord d'attaque. En contrepartie, le niveau de succion est inférieur lors du recouvrement de la pression sur la partie aval du profil; ces deux caractéristiques opposées de la distribution de pression contribuent globalement à conserver la valeur de la portance après l'optimisation (voir tableau XII). Cette modification de la distribution de pression a également pour effet de diminuer la traînée de pression autour du profil suite à l'optimisation. Ainsi, la combinaison d'une succion plus importante sur l'avant de l'extrados du profil et plus faible sur l'arrière entraîne une réduction de la traînée de pression (voir tableau XII). La modification du champ de pression explique aussi la baisse de traînée de friction. Après optimisation, la couche limite sur l'extrados du profil subit un gradient de pression adverse plus important ce qui réduit le cisaillement à la paroi. Cette interprétation est confirmée par l'observation de la distribution du coefficient de friction local,  $C_{fx} = \frac{\tau_{xy}}{2\rho U_\infty^2}$ , autour du profil, distribution présentée à la figure 48. Ainsi, sur l'essentiel de la surface de l'extrados du profil, le cisaillement local a diminué suite à l'optimisation.

Tel que mentionné précédemment, à la fin de l'optimisation, seule la contrainte d'épaisseur située à 98% de la longueur du profil est active (voir figure 46). La valeur de la fonction de pénalisation  $\mathcal{F}_T$  est alors de  $7.8 \cdot 10^{-6}$  (voir tableau XII), ce qui est négli-

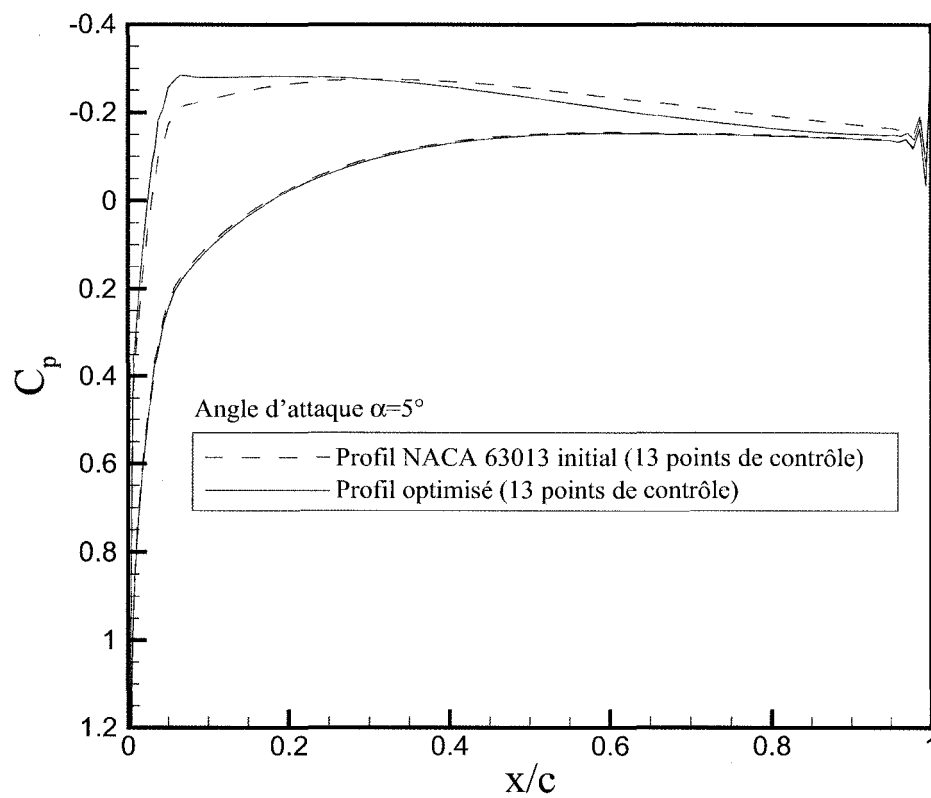


Figure 47 Coefficient de pression ( $C_p$ ), optimisation de la finesse du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle

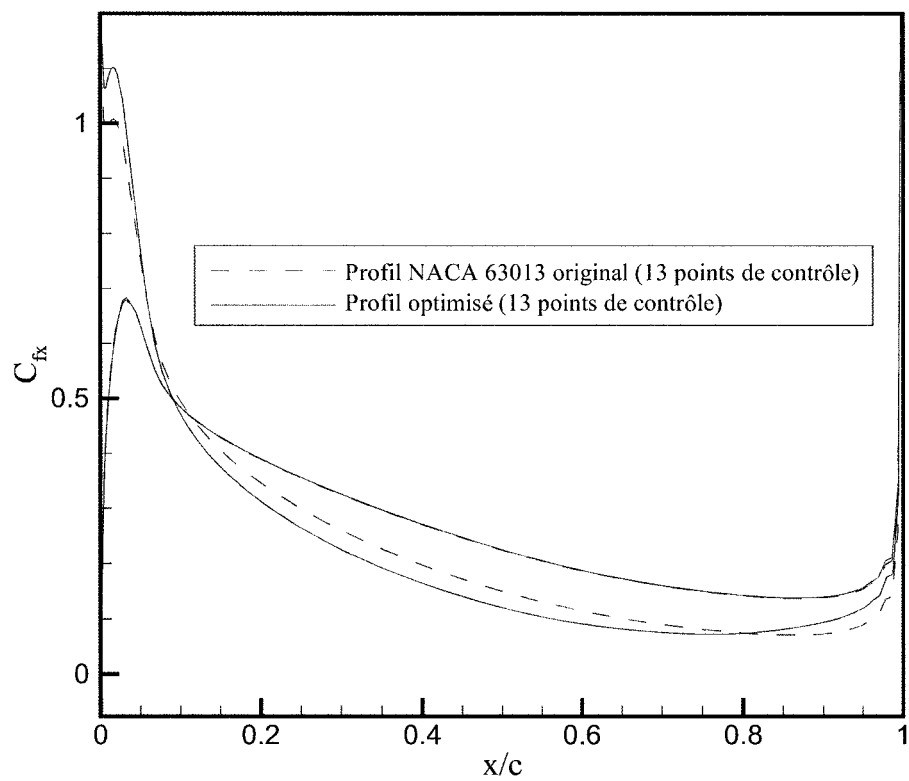


Figure 48 Coefficient de friction local ( $C_{fx}$ ), optimisation de la finesse du profil NACA-63013 ( $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 40$ ) approximés par des NUBS possédant 13 points de contrôle

geable par rapport à la valeur globale de la fonction objectif  $\tilde{\mathcal{F}}_{C_D/C_L} = 2.27691$ . La faible valeur de  $\mathcal{F}_T$  implique que la contrainte d'épaisseur n'est que faiblement violée, ainsi  $\frac{t(98\%)}{t^*(98\%)} = 99.7\%$ . Toutefois, sans l'imposition d'une contrainte d'épaisseur, les optimisations aboutissent systématiquement à des profils aux géométries impossibles. La présence d'une contrainte d'épaisseur par le biais d'une équation de pénalité ralentit la convergence de l'optimisation par rapport à un problème sans contrainte de par la nature discontinue de la fonction de pénalité (voir équation 6.6). Le processus global d'optimisation a nécessité 126 calculs de l'écoulement et 15 évaluations d'un gradient à 8 dimensions pour une durée totale de 13.3 heures de calcul tel qu'obtenu sur un micro ordinateur basé sur un processeur Intel Pentium IV cadencé à 2.8 GHz et opérant le système d'exploitation Linux Red Hat noyau 2.4.20-13.9 et le compilateur Gnu fortran v3.2.2.. Par projection, une optimisation similaire mais faisant usage des différences finies pour l'obtention du gradient aurait nécessité 23.6 heures de calcul. À travers le présent cas test, la méthode proposée d'optimisation basée sur l'évaluation des sensibilités par la technique des récurrences simplifiées démontre son efficacité dans le cadre de problèmes d'optimisation multi-variables ouverts avec contraintes.



## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

#### 7.1 Compte rendu de la thèse

Dans ce travail, une procédure numérique d'optimisation de forme de profils aérodynamiques a été développée pour le régime d'écoulement stationnaire, incompressible et laminaire. Cette procédure a la capacité de modifier la géométrie de profils aérodynamiques afin de minimiser une fonction objectif établie sur la base d'une ou plusieurs propriétés relatives à l'écoulement autour des profils telles que la distribution de pression ou les performances aérodynamiques. La méthodologie proposée offre également la possibilité d'imposer des contraintes quant à la géométrie du profil. Un des principaux objectifs recherchés dans ce travail doctoral consistait à rendre plus accessible le processus d'optimisation aérodynamique tant au niveau des ressources informatiques impliquées, qu'au niveau de la complexité de la mise en oeuvre des problèmes. La procédure d'optimisation développée est constituée des quatre composantes distinctes suivantes :

1. représentation géométrique de profils aérodynamiques par des courbes mathématiques NUBS [72] et génération de maillages structurés en C par solution non-visqueuse de l'écoulement, interpolations transfinies et lissage elliptique;
2. solution numérique de l'écoulement autour des profils par une méthode couplée de CVFEM [2] à collocation d'ordre égal avec linéarisation de Newton basée sur le schéma convectif de MAW et la prescription d'une équation de Poisson en pression;
3. différenciation de la fonction objectif par la solution d'équations de sensibilités discrètes établies par la technique des récurrences simplifiées [36,38];
4. algorithme d'optimisation quasi-Newton DFP(Davidson-Fletcher-Powell) [21,28].

À travers ces quatre sous domaines, des contributions originales ont été réalisées telles que développée à la section suivante.

## 7.2 Contributions du travail

La principale contribution réalisée dans ce travail réside dans le développement et la mise en oeuvre d'une procédure d'optimisation de forme de profils aérodynamiques. Cette dernière est basée sur la solution d'un système d'équations de sensibilité discrète élaborées par la technique des récurrences simplifiées à partir des équations de Navier-Stokes discrétisées par une méthode couplée de CVFEM. À travers la réalisation globale de ce travail, on peut identifier les contributions spécifiques suivantes :

- le développement et la mise en oeuvre d'une procédure originale de modélisation géométrique de profil établie sur les courbes mathématiques NUBS (Non-Uniform B-Spline) ont été effectués. La particularité de la méthode réside dans la spécification du vecteur noeud des courbes. À partir de l'étude de 16 profils aérodynamiques existants, il a été démontré que, pour la modélisation proposée, 22 points de contrôle sont nécessaires afin de représenter les profils étudiés avec une tolérance géométrique maximale inférieure à  $\epsilon_{g,max} \leq 1.85 \times 10^{-4}$ ;
- le développement et la mise en oeuvre d'un nouvel algorithme de CVFEM (Control-Volume Finite Element Method) ont été réalisés. Les aspects qui distinguent cette formulation des précédentes sont résumés ci-dessous :
  - la solution couplée des équations de Navier-Stokes retient la spécification d'une équation de Poisson pour la pression, ce qui confère un meilleur conditionnement au système d'équations couplés;
  - le traitement implicite des non-linéarités provenant des termes convectifs par la prescription d'une linéarisation de Newton. Ainsi, les schémas convectifs de MAW et de FLO ont successivement été linéarisés;

De plus, une comparaison systématique et stricte entre plusieurs versions de CVFEM se différenciant uniquement par le type de couplage ou le type de linéarisation employés a permis d'établir des conclusions quant au comportement et à la performance des méthodes de CVFEM couplées et séquentielles et des procédures de

linéarisation de Picard et de Newton. L'ensemble de ces aspects relatifs à la méthode couplée de CVFEM a fait l'objet d'une publication [2] dans un journal avec comité de lecture.

- le développement et la mise en oeuvre d'une procédure de différenciation de la fonction objectif réalisée à partir de la solution d'équations de sensibilités discrètes ont été réalisés. Ces équations de sensibilités ont été établies par la technique des récurrences simplifiées à partir des équations de Navier-Stokes discrétisées par la méthode couplée de CVFEM précédemment citées. Un algorithme original de solution de ces équations de sensibilités discrètes a également été proposé. Ce travail constitue une première application des CVFEM au calcul des sensibilités et fait le sujet d'un article de journal actuellement en rédaction.

### 7.3 Recommandations

De par la nature multi-disciplinaire de ce projet, les recommandations quant aux efforts futurs à investir dans la continuité de ce travail doctoral concernent quatre domaines de recherche : (i) la modélisation géométrique de profil, (ii) la solution numérique de l'écoulement, (iii) la différenciation de la fonction objectif et (iv) l'algorithme d'optimisation. Les recommandations énoncées ci-dessous sont classées suivant un ordre de priorité décroissante :

- dans ce travail, les écoulements considérés sont laminaires. L'extension de la méthodologie d'optimisation proposée aux écoulements turbulents constitue la tâche prioritaire dans la poursuite de la présente recherche. Ainsi, ce développement permettra l'application de la procédure proposée à des cas pratiques d'optimisation. Ce passage aux écoulements turbulents entraîne des modifications concernant la méthode numérique pour la simulation de l'écoulement et celle pour le calcul des sensibilités;

- plusieurs recommandations peuvent être suggérées afin d’améliorer la qualité et l’efficacité des solutions numériques de l’écoulement :
  - la modification la plus pressante semble être la prescription et la mise en oeuvre d’un schéma d’interpolation convectif d’ordre supérieur pour remplacer le schéma actuel de MAW [92];
  - l’utilisation de maillages non-structurés permettrait également d’améliorer l’efficacité des calculs et offrirait la possibilité de traiter des problèmes aux géométries plus complexes;
  - une des conclusions de ce travail fut de reconnaître le rôle central joué par l’algorithme de solution du système d’équations linéaires dans la performance de la méthode numérique de simulation de l’écoulement. Un recensement et une étude comparative complète des divers algorithmes de solution et de pré-conditionnement de systèmes linéaires seraient par conséquent bénéfiques [24, 85].
- dans ce travail, les contraintes géométriques sur l’épaisseur du profil ont été imposées par une méthode de pénalité [9, 67]. Il existe cependant des approches supérieures [9, 25] qui viendraient améliorer la facilité de mise en oeuvre des problèmes d’optimisation ainsi que la précision des résultats obtenus;
- les travaux actuels traitant de modélisation géométrique de profils [57] n’abordent pas la problématique de l’effet de la représentation de profils sur le conditionnement de l’optimisation. Une meilleure compréhension de cette problématique devrait aboutir à la prescription d’une représentation de profil plus appropriée à l’optimisation aérodynamique;
- l’algorithme d’optimisation DFP [21, 28] utilisé est valable et efficace dans le cas de problème convexe. Il existe cependant d’autres algorithmes [18, 19, 74] plus puissants lorsque la fonction est quelconque;

- lors de la discrétisation des équations de sensibilités, les chercheurs adoptent soit une formulation discrète [51, 65] soit une formulation continue [37, 48]. Une comparaison stricte de la précision et de la performance de ces deux approches constituerait un avancement certain des connaissances;
- des axes futurs de développement résident également dans l'application de procédures d'optimisation similaires à des domaines d'applications autres que l'aérodynamique de profils;
- le développement d'une formulation tridimensionnelle de la procédure d'optimisation proposée est un objectif souhaitable afin d'élargir la gamme des problèmes abordables. Toutefois, les ressources informatiques impliquées demeurent encore très importantes pour les capacités des ordinateurs actuels.

En conclusion, cette thèse étant un premier effort de recherche du groupe AÉMN en optimisation aérodynamique de profils par solution d'équations discrètes de sensibilités, l'auteur espère que ce travail et les résultats obtenus faciliteront et encourageront d'autres recherches dans le même domaine.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] I.H. Abbott and A.E. Von Doenhoff. *Theory of Wing Sections : Including a Summary of Airfoil Data*. Dover Publications, New York, 1959.
- [2] I. Ammara and C. Masson. Development of a fully coupled control-volume finite element method for the incompressible navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Method in Fluids*, 44 :621–644, 2004.
- [3] I. Ammara, C. Masson, and C. Leclerc. A viscous three-dimensional differential/actuator disk method for the aerodynamic analysis of wind farms. *Journal of Solar Energy Engineering*, 24 :345–356, 2002.
- [4] W. K. Anderson and V. Venkatakrishnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. In *AIAA-97-0643*, 1997.
- [5] B.R. Baliga. *Advances in Numerical Heat Transfer*, chapter 3. Hemisphere Publishing Corp., Washington D.C., 1997.
- [6] B.R. Baliga and S.V. Patankar. A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, 3 :393–409, 1980.
- [7] B.R. Baliga and S.V. Patankar. *Hand Book of Numerical Heat Transfer*, chapter 11, pages 421–461. Wiley, New York, 1988.
- [8] O. Baysal and K. Ghayour. Continuous adjoint sensitivities for general cost functionals on unstructured meshes in aerodynamic shape optimization grids using the navier-stokes equations. In *AIAA-98-4904*, 1998.
- [9] A.D. Belegundu and T.R. Chandrupatla. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Prentice-Hall, 1999.
- [10] C. H. Bischof, L.L. Green, Haigler K. J., and T.L. Jr. Knauff. Parallel calculation of sensitivity derivatives for aircraft design using automatic differentiation. Panama city, Florida, 1994.
- [11] A. Brandt. Multi-level adaptative solutions to boundary value problems. *Mathematics and Computation*, 31 :333–390, 1977.
- [12] G. W. Burgreen and O. Baysal. Three-dimensionnal aerodynamic shape optimization using discrete sensitivity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 9 :1761–1770, 1996.

- [13] R.L. Campbell. An approach to constrained aerodynamic design with application to airfoils. Technical report, NASA TP-3260, 1992.
- [14] L.S. Caretto, R.M. Curr, and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfert*, 15 :1806–1878, 1972.
- [15] A. Carle, M. Fagan, and L. L. Green. Preliminary results from the application of automated adjoint code generation to cfl3d. In *AIAA-98-4807*, 1998.
- [16] A. Carle, L. L. Green, C.H. Bischof, and P.A. Newman. Application of automatic differentiation to cfd. In *AIAA-94-2197*, 1994.
- [17] A. Cauchy. Méthode générale pour la résolution de systèmes d'équations simultanées. Technical report, 25, 536-538, 1847.
- [18] L. Chambers. *Practical Hand Book of Genetic Algorithm*. CRC Press, Florida, 1995.
- [19] A. Corana, M. Marchesi, C. Martini, and S. Ridella. Minimizing multimodal functions of continuous variables with simulated annealing algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 12 :262–280, 1987.
- [20] A.L. da Costa. Application of computational aerodynamics methods to the design and analysis of transport aircraft. In *ICAS-78.B2-01*, 1978.
- [21] W. C. Davidson. Variable metric method for minimization. Technical report, Argonne National Laboratory, US Atomic Energy Commision, 1959.
- [22] G. B. Deng, J. Piquet, P. Queutey, and M. Visonneau. A new fully coupled solution of the navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19 :605–639, 1994.
- [23] D. Doorly. *Parallel Genetic Algorithms for Optimization in CFD*, chapter 13, pages 251–270. Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science ,John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [24] L. C. Dutto. On the iterative methods for solving linear systems of equations. Technical report, Concondia University, 1997.
- [25] J. Elliott and J. Peraire. Constrained multipoint shape optimization for complex 3d configurations. *Aeronautical Journal*, 102 :365–376, 1998.
- [26] B.A. Finlayson and L.E. Scriven. The method of weighted residuals- a review. *Appl. Mech. Rev.*, 19 :735–748, 1966.

- [27] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. Wiley, New-York, 2nd edition, 1987.
- [28] R. Fletcher and M. J. D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer Journal*, 6 :163–168, 1963.
- [29] R. Fletcher and C. M. Reeves. Function minimization by conjugate gradient. *Computer Journal*, 7 :149–154, 1964.
- [30] B. Fornberg. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *Journal Fluid Mechanics*, 98 :819, 1980.
- [31] F. Fourcade, T. Eve, and T. Socroun. Optimiser les chargements des réacteurs nucléaires français. Technical Report 96-12, CETAI, Montréal, 1996.
- [32] P. F. Galpin, J.P. Van Doormaal, and G. D. Raithby. Solution of the incompressible mass and momentum equations by applications of a coupled equation line solver. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 5 :615, 1985.
- [33] M. Gen and R. Chen. *Genetic Algorithms and Engineering Design*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [34] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solution for incompressible flow using the navier-stokes equation and multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48 :387–411, 1982.
- [35] K. C. Giannakoglou and E. S. Politis. A pressure correction scheme using coupled momentum equations. *Numerical Heat Transfer*, 32 :419–435, 1997.
- [36] J. Ch. Gilbert. Automatic differentiation and iterative processes. *Optimization Methods and Software*, 1 :13–21, 1991.
- [37] A.G. Godfrey and E.M. Cliff. Sensitivity equations for turbulent flows. In *AIAA 2001-1060*, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2001.
- [38] A Griewank, C. Bishof, G. Corliss, A Carle, and K. Williamson. Derivative convergence for iterative equation solver. *Optimization Methods and Software*, 2 :321–355, 1993.
- [39] C. R. Gumbert, G.J.-W. Hou, and P. A. Newman. Simultaneous aerodynamic analysis and design optimization (saado) for 3-d flexible wing. In *AIAA-2001-1107*, 39TH AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV, 2001.
- [40] M. Gunzburger. *Control and Optimal Design of Flow Systems with CFD*, pages 1–224. CERCA, Montréal, 2002.



- [41] S. Hadji and G. Dhatt. Iterative methods for incompressible flows. In *Second Annual Conference of the CFD Society of Canada*, 99-106, 1994.
- [42] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependant viscous flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [43] M. Hoekstra. Recent developments in ship stern flow prediction code. In *5th Symposium on Numerical Ship Hydrodynamics*, pages 87–101, Hiroshima, 1989.
- [44] J. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial System*. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- [45] R. I. Issa. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Comput. Physic.*, 62 :40–65, 1986.
- [46] A. Jameson. The present status, challenges, and future developments in computational fluid dynamics. Technical report, 77th AGARD Fluid Dynamics Panel Symposium, Seville, 1995.
- [47] A. Jameson. Computational fluid dynamics for aerodynamic design :its current and future impact. In *AIAA-2001-0538, 39TH AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, NV, 2001.
- [48] A. Jameson, N.A. Pierce, and L. Martinelli. Optimum aerodynamic design using the navier-stokes equations. 1997.
- [49] A. Jameson and J. C. Vassberg. Studies of alternative numerical optimization methods applied to the brachistochrone problem. In *OptiCON'99*, Newport Beach, CA, 1999.
- [50] B. J. Jones, W. A. Crossley, and A. S. Lyrintzis. Aerodynamic and aeroacoustic optimization of airfoils via a parallel genetic algorithm. In *AIAA-98-4811*, 1998.
- [51] C. S. Kim, C. Kim, and O. H. Rho. Aerodynamic sensitivity analysis for turbulent flows on chimera overlaid grids. In *AIAA-2001-0267, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2001.
- [52] D. A. Knoll and P. R. McHugh. A fully implicit direct newton solver for navier-stokes equations. *International Journal of Numerical Method in Fluid*, 17 :449–461, 1993.
- [53] P. Knupp and S. Steinberg. *Fundamentals of Grid Generation*, page 286. CRC Press, Florida, 1994.

- [54] L. Lamarche. *Capteurs et Chaînes de Mesures*. ETS, 2 edition, 1990.
- [55] O. Levin and W. Shyy. Optimization of a flexible low Reynolds number airfoil. In *AIAA-2001-0125, 39TH AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, NV, 2001.
- [56] T. Lutz and S. Wagner. Drag reduction and shape optimisation of airship bodies. *Journal of Aircraft*, 35 :345–351, 1998.
- [57] J. Lépine, J.-Y. Trépanier, and F. Pépin. Wing aerodynamic design using optimized NURBS geometrical representation. In *AIAA-2000-669*, 2000.
- [58] N. Marco and S. Lanteri. A two-level parallelization strategy for genetic algorithms applied to shape optimum design. Technical report, INRIA n°3463, 1998.
- [59] C. Masson, H.J. Saabas, and B.R. Baliga. Co-located equal-order control volume finite element method for two-dimensional axisymmetric incompressible fluid flow. *International Journal for Numerical Method in Fluids*, 18 :1–26, 1994.
- [60] F. Mavriplis. Aerodynamic prediction and design method of aircraft high lift systems. Technical report, Canadair Report No. RAZ-000-381, 1973.
- [61] S. McCormick. *Multigrid Methods*. Volume 3 of the SIAM Frontiers Series, Philadelphia, 1987.
- [62] P. R. McHugh and D. A. Knoll. Fully coupled finite volume solution of incompressible navier-stokes and energy equations using an inexact newton method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19 :439–455, 1994.
- [63] B.-K. Min and K.-S. Chang. A momentum coupling method for the unsteady incompressible navier-stokes equations on staggered grid. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28 :443–460, 1998.
- [64] B. Mohammadi. A new optimal shape design procedure for inviscid and viscous turbulent flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25 :183–203, 1997.
- [65] B. Mohammadi and O. Pironneau. Mesh adaptation and automatic differentiation in a cad-free framework for optimal shape design. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30 :127–136, 1999.
- [66] J.A Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7 :308–313, 1965.

- [67] M. Nemec and D.W. Zingg. Newton-krylov algorithm for aerodynamic design using the Navier-Stokes equations. *ALAA Journal*, 40 :11146–1153, 2002.
- [68] E. Nielsen and W. K. Anderson. Aerodynamic design optimization on unstructured grids using the Navier-Stokes equations. In *ALAA-98-4809*, 1998.
- [69] S. Obayashi and S. Takanashi. Genetic optimization of target pressure distribution for inverse design method. *ALAA Journal*, 34 :881–886, 1996.
- [70] A. Pascau, C. Perez, and F. J. Seron. A comparison of segregated and coupled methods for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *Numerical Methods in Engineering*, 12 :617–630, 1995.
- [71] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, 1980.
- [72] L Piegls and W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer, 1997.
- [73] J. Piquet and P. Queutey. Navier-stokes computations past a prolate spheroid at incidence. *International Journal of Numerical Method in Fluid*, 16 :1–27, 1993.
- [74] C. Poloni. *Hybrid GA for Multi-objective Aerodynamic Shape Optimization*, chapter 20, pages 397–415. Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science ,John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [75] M. J. D. Powell. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, 7 :155–162, 1964.
- [76] C. Prakash. Examination of the upwind (donor-cell) formulation in control volume finite-element methods for fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, 11 :401–416, 1987.
- [77] C. Prakash and S. V. Patankar. A control-volume-based-finite-element method for solving the navier-stokes equation using equal-order velocity-pressure interpolation. *Numerical Heat Transfer*, 8 :259–280, 1985.
- [78] J. P  riaux, M. Sefrioui, B. Stoufflet, B. Mantel, and E. Laporte. *Robust Genetic Algorithms for Optimization Problems in Aerodynamic Design*, chapter 19, pages 371–396. Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science ,John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [79] D. Quagliarella. *Genetic Algorithms Applications in Computational Fluid Dynamics*, chapter 21, pages 417–442. Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science ,John Wiley & Sons, New York, 1995.

- [80] P.e. Rubbert and M.I. Goldhammer. Cfd in design : An airframe perspective. In *AIAA-89-0092*, 1989.
- [81] H.J. Saabas and Baliga B.R. Co-located equal-order control-volume finite element method for multidimensional, incompressible, fluid flow-part i. *Numerical Heat Transfer*, 26B :21–32, 1994.
- [82] Y. Saad. Sparskit : a basic tool for sparse matrix computation. Technical report, 90.20, RIACS, NASA Ames Research Center, 1990.
- [83] H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [84] G.E. Schneider and M.J. Raw. A skewed positive influence coefficient upwinding procedure for control volume based finite element convection diffusion computation. *Numerical Heat Transfer*, 9 :1–26, 1986.
- [85] A. Soulaïmani, N. Ben Salah, and Y. Saad. Enhanced gmres acceleration techniques for some cfd problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 16 :1–20, 2002.
- [86] A. Soulaïmani, Y. Saad, and A. Qaddouri. Parallelization of a finite element cfd code using psparslib : Application to three dimensional free surface flows. In *Proceedings of the Fourth European Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 914–922, 1998.
- [87] C.-H. Sung and J. H. Kwon. Aerodynamic design optimization using the navier-stokes and adjoint equations. In *AIAA-2001-0266*, 2001.
- [88] S. S. Talya, J. N. Rajadas, and A. Chattopadhyay. Multidisciplinary optimization of gas turbine blade design. In *AIAA-98-4864*, 1998.
- [89] J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, and C. W. Mastin. *Numerical Grid Generation : Foundation and Application*, page 483. North-Holland, New York, 1985.
- [90] E. N. Tinoco. Cfd application to complex configurations : A survey. *Progress in Astronautics and Aeronautics : Applied Computational Aerodynamics*, 125 :559–615, 1990.
- [91] E. N. Tinoco. The impact of computational fluid dynamics on aircraft design. In *Proceedings of the 44th CASI Annual Conference*, pages 1–15, Toronto, 1996.
- [92] L.D. Tran, C. Masson, and A. Smaïli. A stable second-order mass-weighted upwind scheme for unstructured meshes. *Soumis pour publication au International Journal for Numerical Method in Fluids*, 2004.

- [93] D. J. Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds number. *Journal Fluid Mechanics*, 6 :547, 1959.
- [94] J.P. Van Doormaal and G.D. Raithby. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7 :147–163, 1984.
- [95] H. Van Santen, D. Lathouwers, C. R. Kleijn, and H. E. A. Van Den Akker. Influence of segregation on the efficiency of finite volume methods for the incompressible navier-stokes equations. In *ASME FED Vol 238, Fluids Engineering Division Conference*, pages 151–157, 1996.
- [96] SP. Vanka. Block-implicit calculation of steady turbulent recirculating flows. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, 28 :2093–2103, 1985.
- [97] V.N. Vatsa, M.D. Sanetrik, and Parlette. E.B. Development of a flexible and efficient multigrid-based multiblock flow solver. In *AIAA-93-0677*, 1993.
- [98] I. Zeid. *Cad/Cam Theory and Practice*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1991.
- [99] O.C. Zienkiewicz. *The finite Element Method*. McGraw-Hill, London, 1977.